Les facteurs de transfert pour les groupes classiques: un formulaire

Jean-Loup Waldspurger

Les facteurs de transfert pour les groupes classiques : un formulaire

J.-L. Waldspurger

3 novembre 2009

Introduction

Le facteur de transfert est un terme qui intervient de façon cruciale dans la stabilisation de la formule des traces. Il a été défini par Langlands et Shelstad dans le cas de l'endoscopie ordinaire ([LS]), puis dans le cadre plus général de l'endoscopie tordue par Kottwitz et Shelstad ([KS]). La définition est un peu abstraite et c'est un exercice amusant de l'expliciter dans des cas particuliers. On calcule ici les facteurs de transfert pour les groupes classiques. Précisément pour les groupes symplectiques, spéciaux orthogonaux, unitaires, ainsi que pour les groupes linéaires tordus et pour les groupes tordus déduits de groupes unitaires par changement de base. Le point de vue adopté, comme dans [W] chapitre X, est de paramétrer les classes de conjugaison, ou de conjugaison stable, des éléments semi-simples réguliers d'un tel groupe par des données de géométrie élémentaire. Par exemple, la classe de conjugaison stable d'un tel élément est déterminée par les valeurs propres de l'élément dans la représentation naturelle du groupe. On peut expliciter les facteurs de transfert à l'aide de ces paramètres. Le résultat est la proposition 1.10 ci-dessous. Signalons que Kottwitz a trouvé, au moins dans le cas des algèbres de Lie, une autre façon de calculer ces facteurs, à l'aide de sections de Kostant. Cette méthode s'est avérée particulièrement fructueuse. On espère néanmoins que les formules présentées ici pourront trouver quelques applications. Dans la première section, on définit les groupes considérés, les paramètres utilisés, les L-groupes et les données endoscopiques. A propos de ces dernières, signalons qu'il importe de les fixer précisément. En effet, le facteur de transfert dépend vraiment des données endoscopiques, et pas seulement de leur classe d'équivalence (on s'en convainc en considérant les données endoscopiques de GL_1). Ce point n'est peut-être pas assez souligné dans la littérature. La section se termine par l'énoncé du résultat. Les démonstrations n'ont aucun intérêt : il s'agit simplement d'expliciter les définitions dans chacun des cas. Toutefois, il paraîtrait peut-être bizarre de ne présenter aucune preuve. Dans la deuxième section, on a donc rédigé une preuve : celle du cas des groupes linéaires tordus, en dimension impaire.

1 Les résultats

1.1 Notations

Soit F un corps local de caractéristique nulle. On suppose que F n'est pas le corps des complexes, la théorie étant triviale dans ce cas. On fixe une clôture algébrique $\bar{F}$

de F. On appelle ici extension algébrique de F un sous-corps de $\bar{F}$ contenant F. On note $Gal(\bar{F}/F)$, resp. W_F, le groupe de Galois, resp. le groupe de Weil, de $\bar{F}/F$. Par l'homomorphisme $W_F \to F^\times$ du corps de classes, tout homomorphisme χ de $F^\times$ définit un homomorphisme de W_F que l'on note encore χ. Si E est une extension quadratique de F, on note $\tau_{E/F}$ l'unique élément non trivial du groupe de Galois $Gal(E/F)$ et $sgn_{E/F}$ le caractère quadratique de $F^\times$ dont le noyau est le groupe des normes $Norm_{E/F}(E^\times)$.

Si G est un groupe réductif défini sur F, on note $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie.

1.2 Définition des groupes et groupes tordus

On étudiera dans la suite différents cas pour lesquels on introduit ici les notations de base, que l'on ne rappellera plus.

Le cas symplectique. Soit V un espace vectoriel sur F de dimension finie d, muni d'une forme symplectique q (d est donc pair). On note G le groupe symplectique de (V,q).

Le cas spécial orthogonal. Soit V un espace vectoriel sur F de dimension finie d, muni d'une forme quadratique (c'est-à-dire une forme bilinéaire symétrique) non dégénérée q. On note G le groupe spécial orthogonal de (V,q). Ce cas, comme certains des cas suivants, se subdivise en un cas pair et un cas impair selon la parité de d. Dans le cas pair, on définit le discriminant δ de q par $\delta = (-1)^{d/2}det(q)$ (par convention, $\delta = 1$ si $d = 0$). C'est un élément de $F^\times/F^{\times,2}$. On l'a normalisé de sorte que $\delta = 1$ si (V,q) est somme orthogonale de plans hyperboliques. On exclut le cas où $d = 2$ et $\delta = 1$.

Le cas du groupe linéaire tordu. Soit V un espace vectoriel sur F de dimension finie d. On note G le groupe (algébrique)des automorphismes linéaires de V. On note $\tilde{G}$ l'ensemble (ou plus exactement la variété algébrique) des formes bilinéaires non dégénérées sur $V \times V$. Le groupe G agit à gauche et à droite sur $\tilde{G}$ de la façon suivante. Soient $g, g' \in G$ et $\tilde{x} \in \tilde{G}$. Alors $g\tilde{x}g'$ est la forme bilinéaire

$$(v, v') \mapsto \tilde{x}(g^{-1}v, g'v').$$

Ces actions font de $(G, \tilde{G})$ un "groupe tordu", dans la terminologie de Labesse.

Considérons le groupe linéaire GL_d. On note θ_d son automorphisme défini par $\theta_d(g) = J_d{}^tg^{-1}J_d^{-1}$, où J_d est la matrice antidiagonale dont les coefficients non nuls sont définis par $(J_d)_{k,d+1-k} = (-1)^k$. Le carré de θ_d est l'identité et on peut introduire le produit semi-direct $GL_d^+ = GL_d \rtimes \{1, \theta_d\}$. Fixons une base $(e_k)_{k=1,...,d}$ de V. Elle nous permet d'identifier G à GL_d. Fixons de plus un élément $\nu \in F^\times$. Notons $\tilde{\theta}$ l'élément de $\tilde{G}(F)$ défini par les égalités

$$\tilde{\theta}(e_k, e_l) = \nu(-1)^k\delta_{k,d+1-l},$$

où le dernier terme est le symbole de Kronecker. On peut identifier $\tilde{G}$ à la composante non neutre $GL_d\theta_d$ de GL_d^+ par l'application $g\tilde{\theta} \mapsto g\theta_d$ pour tout $g \in G$.

Le cas unitaire. Soit E une extension quadratique de F. Soit V un espace vectoriel sur E de dimension d, muni d'une forme hermitienne non dégénérée q. Précisons notre convention concernant la sesquilinéarité : on a $q(\lambda v, \lambda' v') = \tau_{E/F}(\lambda)\lambda' q(v, v')$ pour tous $v, v' \in V$, $\lambda, \lambda' \in E$. On note G le groupe unitaire de (V,q).

Le cas du changement de base du groupe unitaire. Soient E une extension quadratique de F et V un espace vectoriel sur E de dimension d. On note G le groupe algébrique sur F, obtenu par restriction des scalaires, tel que $G(F)$ soit le groupe des automorphismes E-linéaires de V. On note $\tilde{G}$ l'ensemble (ou plus exactement la variété algébrique sur F) des formes sesquilinéaires non dégénérées sur V. Le groupe G agit à gauche et à droite sur $\tilde{G}$ par la même formule que dans le cas du groupe linéaire tordu. Ces actions font de $(G, \tilde{G})$ un "groupe tordu".

Notons $\theta_{d,E/F}$ l'automorphisme de $GL_d(E)$ défini par $\theta_{d,E/F}(g) = J_d \tau_{E/F}({}^t g^{-1}) J_d^{-1}$, où $\tau_{E/F}({}^t g^{-1})$ est obtenu en appliquant $\tau_{E/F}$ aux coefficients de ${}^t g^{-1}$. Introduisons le produit semi-direct $GL^+_{d,E/F}(F) = GL_d(E) \rtimes \{1, \theta_{d,E/F}\}$. Fixons une base $(e_k)_{i=1,\dots,d}$ de V sur E. Elle nous permet d'identifier $G(F)$ à $GL_d(E)$. Fixons de plus un élément $\nu \in E^\times$. Notons $\tilde{\theta}$ l'élément de $\tilde{G}(F)$ défini par les égalités

$$\tilde{\theta}(e_k, e_l) = \nu(-1)^k \delta_{k,d+1-l}.$$

On peut identifier $\tilde{G}(F)$ au sous-ensemble $GL_d(E)\theta_{d,E/F}$ de $GL^+_{d,E/F}(F)$ par l'application $g\tilde{\theta} \mapsto g\theta_{d,E/F}$ pour tout $g \in G(F)$. On a décrit ainsi une identification des ensembles de points à valeurs dans F mais il est facile de l'algébriser.

1.3 Classes de conjugaison d'éléments semi-simples suffisamment réguliers

Hormis le cas spécial orthogonal pair, "suffisamment" régulier signifie pour nous fortement régulier. Dans le cas spécial orthogonal pair, les éléments qui ont des valeurs propres ± 1 peuvent être fortement réguliers, tout en n'ayant pas les mêmes propriétés que les éléments en position générale. On entend alors par élément semi-simple suffisamment régulier un élément semi-simple fortement régulier qui n'a aucune valeur propre ± 1.

Le cas symplectique. Donnons-nous la collection d'objets suivante :

• un ensemble fini I ;

• pour tout $i \in I$, une extension finie $F_{\pm i}$ de F et une $F_{\pm i}$-algèbre commutative F_i de dimension 2 sur $F_{\pm i}$ (c'est-à-dire, ou bien F_i est une extension quadratique de $F_{\pm i}$, ou bien $F_i = F_{\pm i} \oplus F_{\pm i}$) ; on note τ_i l'unique automorphisme non trivial de $F_i/F_{\pm i}$;

• pour tout $i \in I$, un élément $c_i \in F_i^\times$ tel que $\tau_i(c_i) = -c_i$ et un élément $x_i \in F_i^\times$ tel que $x_i \tau_i(x_i) = 1$.

On suppose que $d = \sum_{i \in I} [F_i : F]$. Posons $W = \oplus_{i \in I} F_i$ et définissons une forme symplectique q_W sur W par

$$(1) \qquad q_W(\sum_{i \in I} w_i, \sum_{i \in I} w'_i) = \sum_{i \in I} trace_{F_i/F}(\tau_i(w_i) w'_i c_i).$$

Fixons un isomorphisme de (W, q_W) sur (V, q). Notons x l'élément de $G(F)$ qui, modulo cet isomorphisme, est défini par l'égalité :

$$(2) \qquad x(\sum_{i \in I} w_i) = \sum_{i \in I} x_i w_i.$$

Cet élément est semi-simple et sa classe de conjugaison par $G(F)$ ne dépend pas de l'isomorphisme choisi. On décrit facilement à quelles conditions cet élément est régulier. Disons simplement que si la famille $(x_i)_{i \in I}$ est "en position générale", x est régulier (ce qui équivaut à fortement régulier dans le cas symplectique). Inversement toute classe de conjugaison semi-simple régulière dans $G(F)$ est obtenue par ce procédé. Donc, à tout élément semi-simple régulier $x \in G(F)$, on peut associer des données comme ci-dessus. L'ensemble I, les extensions $F_{\pm i}$ et F_i et les éléments x_i sont presque uniquement déterminés (on peut évidemment remplacer I par un autre ensemble de même nombre d'éléments, et chaque triplet $(F_{\pm i}, F_i, x_i)$ par un triplet qui lui est isomorphe sur F). Par contre, les c_i ne sont déterminés qu'à multiplication près par le groupe des normes $Norm_{F_i/F_{\pm i}}(F_i^{\times})$.

Le cas spécial orthogonal impair. On considère une collection d'objets comme dans le cas précédent, à ceci près que l'on suppose maintenant que $\tau_i(c_i) = c_i$. On suppose que $d = 1+\sum_{i\in I}[F_i : F]$. On construit encore l'espace W, la forme q_W qui est maintenant quadratique et on suppose qu'il existe un espace D de dimension 1 muni d'une forme bilinéaire symétrique et non dégénérée q_D de sorte que $(W \oplus D, q_W \oplus q_D)$ soit isomorphe à (V, q). On fixe un tel isomorphisme. On introduit l'élément $x \in G(F)$ qui, modulo cet isomorphisme, agit par la formule (2) sur W et par l'identité sur D. On a alors les mêmes propriétés que dans le cas symplectique.

Le cas spécial orthogonal pair. On considère une collection d'objets comme dans le cas symplectique, à ceci près que l'on suppose, comme dans le cas spécial orthogonal impair, que $\tau(c_i) = c_i$. On suppose que $d = \sum_{i\in I}[F_i : F]$. On construit l'espace W et la forme quadratique q_W. On suppose (W, q_W) isomorphe à (V, q) et on fixe un isomorphisme. On construit l'élément $x \in G(F)$ comme dans le cas symplectique. On a essentiellement les mêmes propriétés que dans le cas symplectique. Il y a toutefois un changement. C'est seulement la classe de conjugaison de x par le groupe orthogonal de V qui est bien déterminée. Or, pour un élément semi-simple suffisamment régulier de $G(F)$, sa classe de conjugaison par le groupe orthogonal se décompose en deux classes de conjugaison par $G(F)$. Autrement dit, notre collection d'objets I, $(F_i)_{i\in I}$ etc... paramètre non pas des classes de conjugaison par $G(F)$ mais des couples de telles classes.

Le cas du groupe linéaire tordu, avec d pair. Donnons-nous la collection d'objets suivante :

• un ensemble fini I ;

• pour tout $i \in I$, une extension finie $F_{\pm i}$ de F et une $F_{\pm i}$-algèbre commutative F_i de dimension 2 sur $F_{\pm i}$;

• pour tout $i \in I$, un élément $x_i \in F_i^{\times}$.

On suppose $d = \sum_{i\in I}[F_i : F]$. On fixe un isomorphisme de V sur $\oplus_{i\in I}F_i$. Modulo cet isomorphisme, on définit un élément $\tilde{x} \in \tilde{G}(F)$ par la formule

$$\tilde{x}(\sum_{i\in I} w_i, \sum_{i\in I} w'_i) = \sum_{i\in I} trace_{F_i/F}(\tau_i(w_i)w'_i x_i).$$

La classe de conjugaison par $G(F)$ de cet élément $\tilde{x}$ est bien déterminée. Si la famille $(x_i)_{i\in I}$ est "en position générale", $\tilde{x}$ est fortement régulier. Inversement toute classe de conjugaison semi-simple fortement régulière dans $\tilde{G}(F)$ est obtenue par ce procédé. Autrement dit, on peut associer à une telle classe des paramètres I, $(F_i)_{i\in I}$ etc... L'ensemble I et les extensions $F_{\pm i}$ et F_i sont déterminés de façon essentiellement unique. Par contre les x_i ne le sont qu'à multiplication près par le groupe $Norm_{F_i/F_{\pm i}}(F_i^{\times})$.

Le cas du groupe linéaire tordu, avec d impair. On se donne une collection d'objets comme dans le cas précédent, plus un élément $x_D \in F^{\times}$. On pose $D = F$ et on fixe un isomorphisme de V sur $D \oplus (\oplus_{i\in I} F_i)$. Modulo cet isomorphisme, on définit un élément $\tilde{x} \in \tilde{G}(F)$ par la formule

$$\tilde{x}(w_D + \sum_{i\in I} w_i, w'_D + \sum_{i\in I} w'_i) = x_D w_D w'_D + \sum_{i\in I} trace_{F_i/F}(\tau_i(w_i) w'_i x_i).$$

On a les mêmes propriétés que dans le cas d pair. Pour un élément semi-simple fortement régulièr $\tilde{x} \in \tilde{G}(F)$, son paramètre x_D n'est déterminé que modulo le groupe des carrés $F^{\times,2}$.

Le cas du groupe unitaire. Donnons-nous la collection d'objets suivante :

• un ensemble fini I ;

• pour tout $i \in I$, une extension finie $F_{\pm i}$ de F ; on pose $F_i = F_{\pm i} \otimes_F E$; c'est une E-algèbre commutative ; l'unique $F_{\pm i}$-automorphisme non trivial τ_i de F_i est $id \otimes \tau_{E/F}$;

• pour tout $i \in I$, un élément $c_i \in F_i^\times$ tel que $\tau_i(c_i) = c_i$ et un élément $x_i \in F_i^\times$ tel que $x_i \tau_i(x_i) = 1$.

On pose $W = \sum_{i\in I} F_i$. C'est un espace vectoriel sur E de dimension $\sum_{i\in I}[F_i : E]$. On suppose que cette dimension est égale à d. On munit W de la forme hermitienne q_W définie par

$$(3) \qquad q_W(\sum_{i\in I} w_i, \sum_{i\in I} w'_i) = \sum_{i\in I} trace_{F_i/E}(\tau_i(w_i) w'_i c_i).$$

On suppose que (W, q_W) est E-isomorphe à (V, q) et on fixe un tel isomorphisme. Modulo celui-ci, on définit un élément $x \in G(F)$ par la formule (2). On a alors les mêmes propriétés que dans le cas symplectique (quant à l'unicité des paramètres, c'est cette fois la classe d'isomorphie sur E des couples (F_i, x_i) qui est uniquement déterminée).

Le cas du changement de base du groupe unitaire. Donnons-nous la collection d'objets suivante :

• un ensemble fini I ;

• pour tout $i \in I$, une extension finie $F_{\pm i}$ de F ; on pose $F_i = F_{\pm i} \otimes_F E$;

• pour tout $i \in I$, un élément $x_i \in F_i^\times$.

On suppose $d = \sum_{i\in I}[F_i : E]$. On fixe un E-isomorphisme de V sur $\sum_{i\in I} F_i$. Modulo cet isomorphisme, on définit $\tilde{x} \in \tilde{G}(F)$ par l'égalité

$$\tilde{x}(\sum_{i\in I} w_i, \sum_{i\in I} w'_i) = \sum_{i\in I} trace_{F_i/E}(\tau_i(w_i) w'_i x_i).$$

On a les mêmes propriétés que dans le cas symplectique. Pour une classe semi-simple fortement régulière $\tilde{x} \in \tilde{G}(F)$, ses paramètres I et $(F_i)_{i\in I}$ sont essentiellement uniquement déterminés (ce sont les classes de E-isomorphismes des F_i qui comptent). Les x_i sont déterminés à multiplication près par le groupe $Norm_{F_i/F_{\pm i}}(F_i^\times)$.

Remarque. En admettant que l'intersection de l'ensemble des lecteurs de cet article et celui des lecteurs de [W] soit non vide, les éléments de cette intersection prendront garde au fait que les formules (1) et (3) ne coïncident pas avec celles de [W]. Dans cette référence, on avait ajouté des coefficients $[F_i : F]^{-1}$ ou $[F_i : E]^{-1}$.

1.4 Classes de conjugaison stable d'éléments semi-simples suffisamment réguliers

Deux éléments semi-simples suffisamment réguliers sont stablement conjugués si et seulement s'ils sont conjugués par un élément de $G(\bar{F})$. Le paramétrage des classes de conjugaison stable de tels éléments se déduit aisément de celui du paragraphe précédent. Dans les cas symplectique, spécial orthogonal ou unitaire, il suffit d'oublier les données $(c_i)_{i\in I}$ (dans le cas spécial orthogonal pair, on classifie ainsi des couples de classes de conjugaison stable). Dans les cas du groupe linéaire tordu ou du changement de base du groupe unitaire, on remplace les classes $x_i Norm_{F_i/F_{\pm i}}(F_i^\times)$ (ce sont ces classes qui paramétraient les classes de conjugaison) par les classes $x_i F_{\pm i}^\times$. Dans le cas du groupe linéaire tordu avec d impair, on oublie de plus l'élément x_D.

1.5 Les formes quasi-déployées

Pour définir des facteurs de transfert, il importe de fixer un groupe quasi-déployé $\underline{G}$ et un torseur intérieur $\psi : G \to \underline{G}$. Que ψ soit un torseur intérieur signifie que c'est un isomorphisme sur $\bar{F}$ et qu'il existe une application $u : Gal(\bar{F}/F) \to \underline{G}(\bar{F})$ telle que $\sigma(\psi)\psi^{-1}(\underline{g}) = u(\sigma)\underline{g}u(\sigma)^{-1}$ pour tout $\underline{g} \in \underline{G}(\bar{F})$. En général, l'application u, composée avec l'application naturelle de $\underline{G}(\bar{F})$ dans son groupe adjoint, est un cocycle. Dans les cas qui nous intéressent, on peut effectuer les choix de sorte que u elle-même soit un cocycle à valeurs dans $\underline{G}(\bar{F})$. D'après une remarque de Kottwitz, cela permet de définir des facteurs de transfert pour le groupe G de la même façon que si G lui-même était quasi-déployé. Précisément, il faut fixer le cocycle u et le facteur de transfert dépend de u et pas seulement de sa classe de cohomologie. Dans le cas symplectique, ou celui du groupe linéaire tordu, ou celui du changement de base du groupe unitaire, G est quasi-déployé, on choisit $\underline{G} = G$, ψ est l'identité et $u(\sigma) = 1$ pour tout $\sigma \in Gal(\bar{F}/F)$. Pour unifier les notations, on pose dans ces cas $\underline{V} = V$ et, dans le cas symplectique, $\underline{q} = q$.

Le cas spécial orthogonal impair. A équivalence près, il existe un unique espace $\underline{V}$ sur F, muni d'une forme quadratique non dégénérée $\underline{q}$, qui vérifie les conditions suivantes : la dimension de $\underline{V}$ sur F est d ; les discriminants de q et $\underline{q}$ sont égaux dans $F^\times/F^{\times,2}$; le groupe spécial orthogonal $\underline{G}$ de $(\underline{V}, \underline{q})$ est quasi-déployé. On introduit cet espace quadratique. Les formes q et $\underline{q}$ définissent par linéarité des formes quadratiques sur $V \otimes_F \bar{F}$ et $\underline{V} \otimes_F \bar{F}$ (à valeurs dans $\bar{F}$). Ces deux formes sont isomorphes. On fixe un isomorphisme $\bar{F}$-linéaire $\delta : V \otimes_F \bar{F} \to \underline{V} \otimes_F \bar{F}$ tel que $\underline{q}(\delta(v), \delta(v')) = q(v, v')$ pour tous $v, v' \in V \otimes_F \bar{F}$. On définit un isomorphisme $\psi : G \to \underline{G}$ par $\psi(g) = \delta g \delta^{-1}$. C'est un torseur intérieur. On prend pour fonction u la fonction définie par $u(\sigma) = \sigma(\delta)\delta^{-1}$. Cette application u est un cocycle à valeurs dans $\underline{G}(\bar{F})$.

Le cas spécial orthogonal pair. Il est identique au précédent, à ceci près que le couple $(\underline{V}, \underline{q})$ n'est pas forcément unique. On en choisit un et on construit un cocycle u et un torseur intérieur $\psi : G \to \underline{G}$ comme ci-dessus. Remarquons que, même si G est quasi-déployé, cette construction peut nous fournir un cocycle u non trivial.

Le cas unitaire. Il existe un espace $\underline{V}$ sur E, muni d'une forme hermitienne non dégénérée $\underline{q}$, qui vérifie les conditions suivantes : la dimension de $\underline{V}$ sur E est d ; le groupe unitaire $\underline{G}$ de $(\underline{V}, \underline{q})$ est quasi-déployé. Le couple $(\underline{V}, \underline{q})$ est unique si d est pair, il y en a deux si d est impair. On choisit un tel espace hermitien. Les formes q et $\underline{q}$ définissent par linéarité des formes $E\otimes_F\bar{F}$-hermitiennes sur $V\otimes_F\bar{F}$ et $\underline{V}\otimes_F\bar{F}$. Ces deux formes sont isomorphes. On fixe un isomorphisme $E\otimes_F\bar{F}$-linéaire $\delta:V\otimes_F\bar{F}\to\underline{V}\otimes_F\bar{F}$ tel que $\underline{q}(\delta(v),\delta(v'))=q(v,v')$ pour tous $v,v'\in V\otimes_F\bar{F}$. On définit un isomorphisme $\psi:G\to\underline{G}$ par $\psi(g)=\delta g\delta^{-1}$. C'est un torseur intérieur. On prend pour fonction u la fonction définie par $u(\sigma)=\sigma(\delta)\delta^{-1}$. Cette application u est un cocycle à valeurs dans $\underline{G}(\bar{F})$.

1.6 Epinglage

Considérons d'abord les cas symplectique, spécial orthogonal pair ou impair, ou unitaire. On fixe un sous-groupe de Borel $\underline{B}$ de $\underline{G}$ défini sur F, un sous-tore maximal $\underline{T}$ de $\underline{B}$ et un épinglage invariant par $Gal(\bar{F}/F)$ relatif à la paire $(\underline{B},\underline{T})$. C'est-à-dire que, pour toute racine simple α de $\underline{T}$ dans l'algèbre de Lie du radical unipotent de $\underline{B}$, on fixe un élément non nul E_α du sous-espace radiciel correspondant, et on suppose que $E_{\sigma(\alpha)}=\sigma(E_\alpha)$ pour toute racine simple α et tout $\sigma\in Gal(\bar{F}/F)$. Notons N la somme des E_α. C'est un élément nilpotent régulier de $\mathfrak{g}(F)$. Dans le cas symplectique ou spécial orthogonal impair, considérons la forme bilinéaire $(v,v')\mapsto\underline{q}(v,N^{d-1}v')$ sur $\underline{V}$. Elle est quadratique de rang 1. Elle est donc équivalente à la somme d'une forme nulle et d'une forme sur F du type $(x,y)\mapsto\eta xy$, avec $\eta\in F^\times$. Cela définit un unique η modulo le groupe des carrés $F^{\times,2}$. Dans le cas spécial orthogonal pair, on considère la forme bilinéaire $(v,v')\mapsto\underline{q}(v,N^{d-2}v')$. La même construction s'applique. Dans le cas unitaire, on considère la forme sesquilinéaire $(v,v')\mapsto\underline{q}(v,N^{d-1}v')$. Elle est hermitienne si d est impair, antihermitienne si d est pair. Elle est de rang 1 et donc équivalente à la somme d'une forme nulle et d'une forme sur E du type $(x,y)\mapsto\eta\tau_{E/F}(x)y$ avec $\eta\in E^\times$ (on a $\eta\in F^\times$ si d est impair, $\tau_{E/F}(\eta)=-\eta$ si d est pair). Cela définit un unique η modulo le groupe des normes $Norm_{E/F}(E^\times)$.

Considérons maintenant les cas du groupe linéaire tordu ou du changement de base du groupe unitaire. Modulo les choix d'une base de V et d'un scalaire ν, on a défini en 1.2 un élément $\tilde{\theta}$ de $\tilde{G}(F)$. Dans le cas du groupe linéaire tordu, c'est une forme symplectique si d est pair, quadratique si d est impair. Dans le cas du changement de base du groupe unitaire, elle est proportionnelle à une forme hermitienne. Notons $G_{\tilde{\theta}}$ la composante neutre de son groupe d'automorphismes. C'est un groupe quasi-déployé. On fixe comme ci-dessus une "paire de Borel épinglée" de ce groupe, invariante par $Gal(\bar{F}/F)$ et on en déduit un élément nilpotent $N\in\mathfrak{g}_{\tilde{\theta}}(F)$. On définit η comme précédemment en considérant la forme $(v,v')\mapsto\tilde{\theta}(v,N^{d-1}v')$ sur V. Dans le cas du groupe linéaire tordu, η est un élément de $F^\times$ bien défini modulo $F^{\times,2}$. Dans le cas du changement de base du groupe unitaire, c'est un élément de $E^\times$ bien défini modulo $Norm_{E/F}(E^\times)$ (ici, η peut être quelconque dans $E^\times$ puisqu'il dépend du scalaire ν).

1.7 L-groupes

Soit $N\geq 1$ un entier. Le groupe $GL_N(\mathbb{C})$ est le groupe des automorphismes de $\mathbb{C}^N$. On note $(\hat{e}_k)_{k=1,\dots,N}$ la base standard de cet espace. On note $\hat{\theta}_N$ l'automorphisme de $GL_N(\mathbb{C})$ défini par la même formule qu'en 1.2, c'est-à-dire $\hat{\theta}_N(g)=J_N{}^tg^{-1}J_N^{-1}$. On note I_N^- l'élément de $GL_N(\mathbb{C})$ qui est antidiagonal et a pour coefficients antidiagonaux

$$(I_N^-)_{k,N+1-k}=(-1)^k.$$

Si N est impair, on pose $I_N^+ = I_N^-$. Si N est pair, on note I_N^+ l'élément de $GL_N(\mathbb{C})$ qui est antidiagonal et a pour coefficients antidiagonaux

$$(I_N^+)_{k,N+1-k} = \begin{cases} (-1)^k, & \text{si } k \leq N/2, \\ (-1)^{k+1}, & \text{si } k > N/2. \end{cases}$$

On note $SO_N(\mathbb{C})$ la composante neutre du sous-groupe des $g \in GL_N(\mathbb{C})$ tels que ${}^t g I_N^+ g = I_N^+$. Si N est pair, on note $Sp_N(\mathbb{C})$ le sous-groupe des $g \in GL_N(\mathbb{C})$ tels que ${}^t g I_N^- g = I_N^-$.

Cas symplectique. Le L-groupe de G est le produit direct $SO_{d+1}(\mathbb{C}) \times W_F$.

Cas spécial orthogonal impair. Le L-groupe de G est le produit direct $Sp_{d-1}(\mathbb{C}) \times W_F$.

Cas spécial orthogonal pair. Soit δ le discriminant de q. Si $\delta = 1$, le L-groupe de G est le produit direct $SO_d(\mathbb{C}) \times W_F$. Si $\delta \neq 1$, on note $E = F(\sqrt{\delta})$. Le L-groupe de G est le produit semi-direct $SO_d(\mathbb{C}) \rtimes W_F$. Un élément de W_E agit trivialement sur $SO_d(\mathbb{C})$. Un élément de $W_F \setminus W_E$ agit par conjugaison par la matrice de permutation de $\mathbb{C}^d$ qui échange les vecteurs $\hat{e}_{d/2}$ et $\hat{e}_{d/2+1}$ et fixe les autres vecteurs de base.

Cas du groupe linéaire tordu. Le L-groupe de G est bien sûr $GL_d(\mathbb{C})$. L'automorphisme "dual" de θ_d est $\hat{\theta}_d$.

Cas du groupe unitaire. Le L-groupe de G est le produit semi-direct $GL_d(\mathbb{C}) \rtimes W_F$. Un élément de W_E agit trivialement sur $GL_d(\mathbb{C})$. Un élément de $W_F \setminus W_E$ agit par l'automorphisme $\hat{\theta}_d$.

Cas du changement de base du groupe unitaire. Le L-groupe de G est le produit semi-direct $(GL_d(\mathbb{C}) \times GL_d(\mathbb{C})) \rtimes W_F$. Un élément de W_E agit trivialement sur $GL_d(\mathbb{C}) \times GL_d(\mathbb{C})$. Un élément de $W_F \setminus W_E$ agit par $(g', g'') \mapsto (g'', g')$. L'automorphisme dual de $\theta_{d,E/F}$ est $(g', g'') \mapsto (\hat{\theta}_d(g''), \hat{\theta}_d(g'))$.

1.8 Données endoscopiques elliptiques

On fixe une donnée endoscopique elliptique pour G, ou pour $\tilde{G}$ dans le cas du groupe linéaire tordu ou du changement de base du groupe unitaire. Une telle donnée est un triplet $(H, s, {}^L\xi)$. Le premier terme H est un groupe réductif connexe défini et quasi-déployé sur F, le deuxième est un élément semi-simple de la composante complexe $\hat{G}$ du L-groupe ${}^LG$ et le troisième est un plongement de L-groupes ${}^L\xi : {}^LH \to {}^LG$. Dans nos cas, H est un produit $H^- \times H^+$, où H^- et H^+ sont chacun de l'un des cas symplectique, spécial orthogonal ou unitaire. On peut représenter H^-, resp. H^+, comme un sous-groupe du groupe d'automorphismes d'un couple (V^-, q^-), resp. (V^+, q^+) comme en 1.2. On note d^-, resp. d^+, la dimension de V^-, resp. V^+. L'élément s est toujours un élément diagonal (dans la représentation du groupe $\hat{G}$ décrite dans le paragraphe précédent), ou un produit (s', s'') d'éléments diagonaux dans le cas du changement de base du groupe unitaire. Ces éléments diagonaux n'ont pour coefficients diagonaux s_k (ou s'_k et s''_k) que des ± 1. Pour décrire ${}^L\xi$, on représente les L-groupes de H^-, H^+ et G comme en 1.7. En particulier, le groupe $\hat{H}^-$, resp. $\hat{H}^+$, $\hat{G}$, est un sous-groupe du groupe des automorphismes d'un espace complexe dont on a fixé une base. On note $\hat{e}_k^-$, resp. $\hat{e}_k^+$, $\hat{e}_k$, les éléments de cette base. La restriction de ${}^L\xi$ à W_F s'écrit $w \mapsto (\rho(w), w)$, avec $\rho(w) \in \hat{G}$.

Cas symplectique. Le groupe H^- est spécial orthogonal pair. On note δ^- le discriminant de q^- et, si $\delta^- \neq 1$, E^- l'extension $F(\sqrt{\delta^-})$. La condition d'ellipticité exclut le cas où $d^- = 2$ et $\delta^- = 1$. Le groupe H^+ est symplectique. On a $d^- + d^+ = d$. On a

$$s_k = \begin{cases} -1, & \text{si } k = 1, ..., d^-/2 \text{ ou } k = d - d^-/2 + 1, ..., d, \\ 1, & \text{si } k = d^-/2 + 1, ..., d - d^-/2. \end{cases}$$

La restriction de ${}^L\xi$ à $\hat{H}^- \times \hat{H}^+$ se déduit de l'identification suivante des bases :

$$\hat{e}_k^- \mapsto \begin{cases} \hat{e}_k, & \text{si } k = 1, ..., d^-/2, \\ \hat{e}_{k+d^+}, & \text{si } k = d^-/2+1, ..., d^-; \end{cases}$$

$$\hat{e}_k^+ \mapsto \hat{e}_{k+d^-/2}.$$

Si $\delta^- = 1$, on a $\rho(w) = 1$ pour tout $w \in W_F$. Si $\delta^- \neq 1$, on a $\rho(w) = 1$ pour $w \in W_{E^-}$. Pour $w \in W_F \setminus W_{E^-}$,

$$\rho(w)\hat{e}_k = \begin{cases} \hat{e}_k, & \text{si } k = 1, ..., d^-/2-1 \text{ ou } k = d-d^-/2+2, ..., d, \\ \hat{e}_{d-d^-/2+1}, & \text{si } k = d^-/2, \\ -\hat{e}_k, & \text{si } k = d^-/2+1, ..., d-d^-/2, \\ \hat{e}_{d^-/2}, & \text{si } k = d-d^-/2+1. \end{cases}$$

Cas spécial orthogonal impair. Les groupes H^- et H^+ sont spéciaux orthogonaux impairs. On a $d^- + d^+ = d+1$. On a

$$s_k = \begin{cases} -1, & \text{si } k = 1, ..., (d^- - 1)/2 \text{ ou } k = d-(d^- - 1)/2, ..., d-1, \\ 1, & \text{si } k = (d^- + 1)/2, ..., d-(d^- + 1)/2. \end{cases}$$

La restriction de ${}^L\xi$ à $\hat{H}^- \times \hat{H}^+$ se déduit de l'identification suivante des bases :

$$\hat{e}_k^- \mapsto \begin{cases} \hat{e}_k, & \text{si } k = 1, ..., (d^- - 1)/2, \\ \hat{e}_{k+d^+-1}, & \text{si } k = (d^- + 1)/2, ..., d^- - 1; \end{cases}$$

$$\hat{e}_k^+ \mapsto \hat{e}_{k+(d^- -1)/2}.$$

On a $\rho(w) = 1$ pour tout $w \in W_F$.

Cas spécial orthogonal pair. Les groupes H^- et H^+ sont spéciaux orthogonaux pairs. On a $d^- + d^+ = d$. On note δ, δ^- et δ^+ les discriminants de q, q^- et q^+ et E, E^- et E^+ les extensions associées, quand elles existent. La condition d'ellipticité exclut les cas où l'un au moins des couples(d^-, δ^-) ou (d^+, δ^+) est égal à $(2, 1)$. On a $\delta^-\delta^+ = \delta$. On a

$$s_k = \begin{cases} -1, & \text{si } k = 1, ..., d^-/2 \text{ ou } k = d-d^-/2+1, ..., d, \\ 1, & \text{si } k = d^-/2+1, ..., d-d^-/2. \end{cases}$$

La restriction de ${}^L\xi$ à $\hat{H}^- \times \hat{H}^+$ se déduit de l'identification suivante des bases :

$$\hat{e}_k^- \mapsto \begin{cases} \hat{e}_k, & \text{si } k = 1, ..., d^-/2, \\ \hat{e}_{k+d^+}, & \text{si } k = d^-/2+1, ..., d^-; \end{cases}$$

$$\hat{e}_k^+ \mapsto \hat{e}_{k+d^-/2}.$$

Si $d^+ \neq 0$, notons $S \in GL_d(\mathbb{C})$ la matrice de permutation qui échange les vecteurs $\hat{e}_{d^-/2}$ et $\hat{e}_{d-d^-/2+1}$, ainsi que les vecteurs $\hat{e}_{d/2}$ et $\hat{e}_{d/2+1}$, et qui fixe les autres vecteurs de base. Si $d^+ = 0$, $S = 1$. Si $\delta^- = 1$, $\rho(w) = 1$ pour tout $w \in W_F$. Si $\delta^- \neq 1$, $\rho(w) = 1$ pour $w \in W_{E^-}$ et $\rho(w) = S$ pour $w \in W_F \setminus W_{E^-}$.

Cas du groupe linéaire tordu avec d pair. Le groupe H^- est spécial orthogonal pair. On note δ^- le discriminant de q^- et, si $\delta^- \neq 1$, E^- l'extension $F(\sqrt{\delta^-})$. La condition d'ellipticité exclut le cas où $d^- = 2$ et $\delta^- = 1$. Le groupe H^+ est spécial orthogonal impair. On a $d^- + d^+ = d+1$. On a

$$s_k = \begin{cases} -1, & \text{si } k = 1, ..., d^-/2, \\ 1, & \text{si } k = d^-/2+1, ..., d. \end{cases}$$

La restriction de ${}^L\xi$ à $\hat{H}^- \times \hat{H}^+$ se déduit de l'identification suivante des bases :

$$\hat{e}_k^- \mapsto \begin{cases} \hat{e}_k, & \text{si } k = 1, ..., d^-/2, \\ \hat{e}_{k+d^+-1}, & \text{si } k = d^-/2+1, ..., d^-; \end{cases}$$

$$\hat{e}_k^+ \mapsto \hat{e}_{k+d^-/2}.$$

Si $\delta^- = 1$, on a $\rho(w) = 1$ pour tout $w \in W_F$. Si $\delta^- \neq 1$, on a $\rho(w) = 1$ pour tout $w \in W_{E^-}$. Pour $w \in W_F \setminus W_{E^-}$, $\rho(w)$ est la matrice de permutation qui échange les vecteurs $\hat{e}_{d^-/2}$ et $\hat{e}_{d-d^-/2+1}$ et qui fixe tout autre vecteur de base.

Cas du groupe linéaire tordu avec d impair. Le groupe H^- est spécial orthogonal impair. Le groupe H^+ est symplectique. On a $d^- + d^+ = d$. On a

$$s_k = \begin{cases} -1, & \text{si } k = 1, ..., (d^- - 1)/2, \\ 1, & \text{si } k = (d^- + 1)/2, ..., d. \end{cases}$$

La restriction de ${}^L\xi$ à $\hat{H}^- \times \hat{H}^+$ se déduit de l'identification suivante des bases :

$$\hat{e}_k^- \mapsto \begin{cases} \hat{e}_k, & \text{si } k = 1, ..., (d^- - 1)/2, \\ \hat{e}_{k+d^++1}, & \text{si } k = (d^- + 1)/2, ..., d^- - 1; \end{cases}$$

$$\hat{e}_k^+ \mapsto \hat{e}_{k+(d^- - 1)/2}.$$

On choisit un caractère χ de $F^\times$, d'ordre au plus 2, que l'on identifie à un caractère de W_F. Pour tout $w \in W_F$, $\rho(w)$ est la matrice diagonale de coefficients

$$\rho(w)_k = \begin{cases} 1, & \text{si } k = 1, ..., (d^- - 1)/2 \text{ ou } k = d - (d^- - 1)/2 + 1, ..., d, \\ \chi(w), & \text{si } k = (d^- + 1)/2, ..., d - (d^- - 1)/2. \end{cases}$$

Cas unitaire. Les groupes H^- et H^+ sont unitaires, relatifs à la même extension E que G. On a

$$s_k = \begin{cases} -1, & \text{si } k = 1, ..., d^- \\ 1, & \text{si } k = d^- + 1, ..., d. \end{cases}$$

La restriction de ${}^L\xi$ à $\hat{H}^- \times \hat{H}^+$ est

$$(g^-, g^+) \mapsto \begin{pmatrix} g^- & 0 \\ 0 & g^+ \end{pmatrix}.$$

On choisit deux caractères μ^- et μ^+ de $E^\times$. On suppose que la restriction de μ^-, resp. μ^+, à $F^\times$ coïncide avec $sgn_{E/F}^{d^+}$, resp. $sgn_{E/F}^{d^-}$. On identifie μ^- et μ^+ à des caractères de W_E. On fixe de plus deux nombres complexes non nuls z^- et z^+. Pour $w \in W_E$, $\rho(w) = \boldsymbol{\mu}(w)$, où $\boldsymbol{\mu}(w)$ est la matrice diagonale de coefficients diagonaux

$$\boldsymbol{\mu}(w)_k = \begin{cases} \mu^-(w), & \text{si } k = 1, ..., d^-, \\ \mu^+(w), & \text{si } k = d^- + 1, ..., d. \end{cases}$$

Pour $w \in W_F \setminus W_E$, on a $\rho(w) = Z$, où $Z \in GL_d(\mathbb{C})$ est définie par

$$Z\hat{e}_k = \begin{cases} z^+\hat{e}_{k+d^-}, & \text{si } k = 1, ..., d^+, \\ z^-\hat{e}_{k-d^+}, & \text{si } k = d^+ + 1, ..., d. \end{cases}$$

Cas du changement de base du groupe unitaire. Les groupes H^- et H^+ sont unitaires, relatifs à la même extension E que G. On a $s = (s', s'')$, avec $s'' = 1$ et

$$s'_k = \begin{cases} -1, & \text{si } k = 1, ..., d^- \\ 1, & \text{si } k = d^- + 1, ..., d. \end{cases}$$

La restriction de ${}^L\xi$ à $\hat{H}^- \times \hat{H}^+$ est $(g^-, g^+) \mapsto (g', g'')$, où

$$g' = \begin{pmatrix} g^- & 0 \\ 0 & g^+ \end{pmatrix}, \; g'' = \hat{\theta}_d(g').$$

On choisit deux caractères μ^- et μ^+ de $E^\times$. On suppose que la restriction de μ^-, resp. μ^+, à $F^\times$ coïncide avec $sgn_{E/F}^{d^+ + 1}$, resp. $sgn_{E/F}^{d^-}$. On identifie μ^- et μ^+ à des caractères de W_E. On fixe de plus deux nombres complexes non nuls z^- et z^+. On définit Z et $\boldsymbol{\mu}(w)$ comme dans le cas unitaire. Pour $w \in W_E$, $\rho(w) = (\boldsymbol{\mu}(w), \hat{\theta}_d(\boldsymbol{\mu}(w)))$. Pour $w \in W_F \setminus W_E$, $\rho(w) = (Z, \hat{\theta}_d(Z)s')$.

On a effectué divers choix qui sont nécessaires pour définir les facteurs de transfert (certains sont toutefois inessentiels, par exemple ceux des éléments z^+ et z^- dans les cas unitaire ou du changement de base du groupe unitaire). Toutefois, la plupart des choix n'affectent pas la classe d'équivalence de la donnée $(H, s, {}^L\xi)$. Indiquons quels sont les objets qui déterminent cette classe.

Cas symplectique. Le couple (d^-, d^+) et le discriminant δ^-.

Cas spécial orthogonal impair. Le couple (d^-, d^+) à l'ordre près, c'est-à-dire que (d^+, d^-) est équivalent à (d^-, d^+).

Cas spécial orthogonal pair. Le quadruplet $(d^-, \delta^-, d^+, \delta^+)$, à la permutation suivante près : $(d^+, \delta^+, d^-, \delta^-)$ est équivalent à $(d^-, \delta^-, d^+, \delta^+)$.

Cas du groupe linéaire tordu, avec d pair. Le triplet (d^-, δ^-, d^+).

Cas du groupe linéaire tordu, avec d impair. Le triplet (d^-, d^+, χ).

Cas du groupe unitaire. Le couple (d^-, d^+) à l'ordre près.

Cas du changement de base du groupe unitaire. Le couple (d^-, d^+).

1.9 Correspondance de classes de conjugaison stable

On fixe un élément $x \in G(F)$, ou $\tilde{x} \in \tilde{G}(F)$ dans les cas du groupe linéaire tordu ou du changement de base du groupe unitaire, et un élément $y = (y^-, y^+) \in H(F)$. On les suppose semi-simples et suffisamment réguliers. Introduisons des données qui paramètrent les classes de conjugaison stable de y^+ et y^-, cf. 1.4. On les note $(I^-, (F_{\pm i})_{i \in I^-}, (F_i)_{i \in I^-}, (y_i)_{i \in I^-})$ et $(I^+, (F_{\pm i})_{i \in I^+}, (F_i)_{i \in I^+}, (y_i)_{i \in I^+})$, en supposant que I^- et I^+ sont des ensembles disjoints. Supposons que les classes de conjugaison stable de x, resp. $\tilde{x}$, et de y se correspondent. Alors on peut paramétrer la classe de conjugaison stable de x, resp. $\tilde{x}$, par les données suivantes :

- l'ensemble $I = I^- \cup I^+$;
- pour $i \in I$, le corps $F_{\pm i}$ et la $F_{\pm i}$-algèbre F_i qui figurent dans les données associées à y^- ou y^+ ;
- pour $i \in I$, un élément $x_i \in F_i^\times$ qui vérifie les conditions suivantes :

- dans les cas symplectique, spécial orthogonal ou unitaire, $x_i = y_i$;
- dans les cas du groupe linéaire tordu ou du changement de base du groupe unitaire, $x_i \tau_i(x_i)^{-1} = (-1)^{d+1} y_i \nu / \tau_i(\nu)$ (rappelons que ν figure dans la définition de l'élément $\tilde{\theta}$) .

Hormis le cas spécial orthogonal pair, la réciproque est vraie : si la classe de conjugaison stable de x, resp. $\tilde{x}$, est paramétrée par les données ci-dessus, les classes de conjugaison stable de x et de y se correspondent. Dans le cas spécial orthogonal pair, on introduit un élément x' qui est conjugué à x par un élément du groupe orthogonal de déterminant -1. On se rappelle que x' n'est pas stablement conjugué à x, mais les classes de conjugaison stable de x et x' sont paramétrées pas les mêmes données. Alors, soit les classes de conjugaison stable de x et y se correspondent, soit ce sont celles de x' et y, ces deux cas étant exclusifs l'un de l'autre.

1.10 Le facteur de transfert

On a fixé un torseur intérieur $\psi : G \mapsto \underline{G}$ et un cocycle u à valeurs dans $G(\bar{F})$. On a fixé un épinglage de $\underline{G}$, ou d'un certain sous-groupe dans les cas du groupe linéaire tordu ou du changement de base du groupe unitaire. On a fixé une donnée endoscopique $(H, s, {}^L\xi)$ de G ou $\tilde{G}$. C'est tout ce qu'il nous faut pour définir un facteur de transfert $\Delta_{H,G}$, ou $\Delta_{H,\tilde{G}}$ ([LS], [KS]). Nous supprimons de ce facteur les termes Δ_{IV}. On considère le facteur de transfert comme une fonction définie sur les couples $(y, x) \in H(F) \times G(F)$, resp. $(y, \tilde{x}) \in H(F) \times \tilde{G}(F)$, formés d'éléments semi-simples suffisamment réguliers et dont les classes de conjugaison stable se correspondent.

Considérons un tel couple. On écrit $y = (y^-, y^+)$ et on paramètre les classes de conjugaison stable de y^- et y^+ comme dans le paragraphe précédent. Comme en 1.3, la classe de conjugaison de x est paramétrée par un ensemble I et des familles $(F_{\pm i})_{i\in I}$, $(F_i)_{i\in I}$, $(x_i)_{i\in I}$ et, dans certains cas, une famille $(c_i)_{i\in I}$ ou un élément x_D. D'après le paragraphe précédent, on peut supposer que $I = I^- \cup I^+$ et que les trois premières familles vérifient les conditions décrites dans ce paragraphe. Considérons d'abord les cas symplectique ou spécial orthogonal ou du groupe linéaire tordu. Pour tout $i \in I$, notons Φ_i l'ensemble des homomorphismes de F-algèbres de F_i dans $\bar{F}$. On définit le polynôme

$$P_I(T) = \prod_{i\in I} \prod_{\phi\in\Phi_i} (T - \phi(y_i)).$$

On définit de façon similaire les polynômes $P_{I^+}(T)$ et $P_{I^-}(T)$. On note $P_I'(T)$ le polynôme dérivé de $P_I(T)$. Considérons maintenant les cas unitaire ou du changement de base du groupe unitaire. Pour tout $i \in I$, on note $\Phi_{i,E}$ l'ensemble des homomorphismes de E-algèbres de F_i dans $\bar{F}$. On définit le polynôme $P_{I,E}(T)$ en remplaçant Φ_i par $\Phi_{i,E}$ dans la formule ci-dessus.

Notons I^* le sous-ensemble des $i \in I$ tels que F_i soit un corps. Définissons I^{-*} et I^{+*} de façon similaire. Soit $i \in I^{-*}$. On définit $C_i \in F_i^\times$ par les formules suivantes.

Cas symplectique. $C_i = -\eta c_i P_I'(y_i) P_I(-1) y_i^{1-d/2}$.

Cas spécial orthogonal impair .

$$C_i = -2\eta c_i P_I'(y_i) P_I(-1) y_i^{(3-d)/2} (1 + y_i)(y_i - 1)^{-1}.$$

Cas spécial orthogonal pair.

$$C_i = 2\eta c_i P_I'(y_i) P_I(-1) y_i^{1-d/2} (1 + y_i)(y_i - 1)^{-1}.$$

Cas du groupe linéaire tordu, avec d pair.

$$C_i = \eta x_i^{-1} P_I'(y_i) P_I(-1) y_i^{1-d/2} (1 + y_i).$$

Cas du groupe linéaire tordu, avec d impair.

$$C_i = x_D x_i^{-1} P'_I(y_i) P_I(1) y_i^{(3-d)/2}(y_i - 1).$$

Cas du groupe unitaire, avec d pair. $C_i = -\eta c_i P'_{I,E}(y_i) P_{I,E}(-1)^{-1} y_i^{1-d/2}$.
Cas du groupe unitaire, avec d impair.

$$C_i = -\eta c_i P'_{I,E}(y_i) P_{I,E}(-1)^{-1} y_i^{(1-d)/2}(1 + y_i).$$

Cas du changement de base du groupe unitaire, avec d pair.

$$C_i = -\eta x_i^{-1} P'_{I,E}(y_i) P_{I,E}(-1)^{-1} y_i^{1-d/2}(1 + y_i).$$

Cas du changement de base du groupe unitaire, avec d impair.

$$C_i = -\eta x_i^{-1} P'_{I,E}(y_i) P_{I,E}(-1)^{-1} y_i^{(3-d)/2}.$$

Dans tous les cas, on vérifie que C_i appartient à $F_{\pm i}^{\times}$.

Proposition. *On a les égalités :*
- dans les cas symplectique ou spécial orthogonal, resp. dans le cas du groupe linéaire tordu, avec d pair,

$$\left.\begin{array}{rl} & \Delta_{H,G}(y,x) \\ \textit{resp.} & \Delta_{H,\tilde{G}}(y,\tilde{x}) \end{array}\right\} = \prod_{i \in I^{-*}} sgn_{F_i/F_{\pm i}}(C_i);$$

- dans le cas du groupe linéaire tordu, avec d impair,

$$\Delta_{H,\tilde{G}}(y,\tilde{x}) = \chi(\eta x_D P_I(1) P_{I^-}(-1)) \prod_{i \in I^{-*}} sgn_{F_i/F_{\pm i}}(C_i);$$

- dans le cas unitaire, resp. dans le cas du changement de base du groupe unitaire,

$$\left.\begin{array}{rl} & \Delta_{H,G}(y,x) \\ \textit{resp.} & \Delta_{H,\tilde{G}}(y,\tilde{x}) \end{array}\right\} = \mu^-(P_{I^-}(0) P_{I^-}(-1)^{-1}) \mu^+(P_{I^+}(0) P_{I^+}(-1)^{-1}) \prod_{i \in I^{-*}} sgn_{F_i/F_{\pm i}}(C_i).$$

1.11 Compléments

Dans les cas spécial orthogonal ou unitaire, on a remarqué que la classe d'équivalence des données $(H, s, {}^L\xi)$ etait invariante par la permutation de H^- et H^+. Cela signifie que, dans la proposition précédente, on peut remplacer l'ensemble d'indices I^{-*} par I^{+*}. On obtient encore un facteur de transfert. Si le cocycle u est trivial, les deux facteurs ainsi obtenus sont égaux. Dans le cas où F est non archimédien, il n'y a que deux classes de cocycles possibles. Alors, si u est non trivial, les deux facteurs de transfert sont opposés l'un de l'autre.

Considérons le cas du groupe linéaire tordu, avec d pair et F non archimédien. Supposons $d^- = d$ et $d^+ = 1$. On a $H^+ = \{1\}$. Le groupe H^- est quasi-déployé. On en choisit une paire de Borel épinglée invariante par $Gal(\bar{F}/F)$ et on en déduit un invariant

η^- comme en 1.6. Supposons $\eta = -\eta^-$. Considérons un couple $(y, \tilde{x})$ comme dans le paragraphe précédent. Définissons une forme quadratique $q_{\tilde{x}}$ sur V par

$$q_{\tilde{x}}(v, v') = \tilde{x}(v, v') + \tilde{x}(v', v).$$

Parce que la classe de conjugaison stable de $\tilde{x}$ correspond à une classe de conjugaison stable de $H(F)$, la forme $q_{\tilde{x}}$ a même discriminant que q^-. On a les égalités

$$\Delta_{H,\tilde{G}}(y, \tilde{x}) = \begin{cases} 1, & \text{si } (V, q_{\tilde{x}}) \text{ et } (V^-, q^-) \text{ sont isomorphes },\\ -1, & \text{sinon.} \end{cases}$$

2 Preuve dans le cas du groupe linéaire tordu, avec d impair

2.1 Changement de $\tilde{x}$ dans sa classe de conjugaison

On considère les données de 1.10 dans le cas du groupe linéaire tordu, avec d impair. L'élément $\tilde{\theta}$ est une forme quadratique sur V. On fixe un élément $c_D \in F^\times$ et, pour tout $i \in I$, on fixe $c_i \in F_{\pm i}^\times$. On pose $D = F$. On suppose qu'il existe un isomorphisme de V sur $D \oplus (\oplus_{i \in I} F_i)$, de sorte que, modulo cet isomorphisme, $\tilde{\theta}$ s'écrive

$$\tilde{\theta}(v_D + \sum_{i \in I} v_i, v'_D + \sum_{i \in I} v'_i) = c_D v_D v'_D + \sum_{i \in I} trace_{F_i/F}(\tau_i(v_i) v'_i c_i).$$

De tels choix sont possibles. On fixe un tel isomorphisme. On note $G_{\tilde{\theta}}$ le groupe spécial orthogonal de $\tilde{\theta}$. Notons $T^\flat$ le sous-tore de $G_{\tilde{\theta}}$ formé des éléments qui respectent chaque sous-espace F_i de V. On a $T^\flat(F) = \prod_{i \in I} F_i^1$, où $F_i^1 = \{\lambda \in F_i^\times; \lambda\tau_i(\lambda) = 1\}$. Notons $T^\diamond$ le commutant de $T^\flat$ dans G. C'est aussi le sous-groupe des éléments de G qui respectent chaque sous-espace F_i ainsi que la droite D. On a $T^\diamond(F) = F^\times \times \prod_{i \in I} F_i^\times$. Posons $t^\diamond_{x,D} = c_D x_D^{-1}$ et, pour $i \in I$, $t^\diamond_{x,i} = c_i \tau_i(x_i)^{-1}$. Définissons l'élément $t^\diamond_{\tilde{x}} = (t^\diamond_{\tilde{x},D}, (t^\diamond_{\tilde{x},i})_{i \in I}))$ de $T(F)$ et considérons l'élément $t^\diamond_{\tilde{x}}\tilde{\theta}$. Par définition de ce dernier produit, on a $(t^\diamond_{\tilde{x}}\tilde{\theta})(v, v') = \tilde{\theta}((t^\diamond_{\tilde{x}})^{-1} v, v')$ pour tout $v, v' \in V$. Plus explicitement

$$\begin{aligned}(t^\diamond_{\tilde{x}}\tilde{\theta})(v_D + \sum_{i \in I} v_i, v'_D + \sum_{i \in I} v'_i) &= c_D (t^\diamond_{\tilde{x},D})^{-1} v_D v'_D + \sum_{i \in I} trace_{F_i/F}(\tau_i(v_i) v'_i c_i \tau_i(t^\diamond_{\tilde{x},i})^{-1})\\ &= x_D v_D v'_D + \sum_{i \in I} trace_{F_i/F}(\tau_i(v_i) v'_i x_i).\end{aligned}$$

On voit ainsi que $t^\diamond_{\tilde{x}}\tilde{\theta}$ est conjugué à $\tilde{x}$. Cela nous permet de supposer désormais $\tilde{x} = t^\diamond_{\tilde{x}}\tilde{\theta}$.

2.2 Systèmes de racines

On pose simplement $\theta = \theta_d$, cf. 1.2. Modulo le choix d'une base de V, on identifie G à GL_d et $\tilde{G}$ à $GL_d\theta$ comme on l'a expliqué dans ce paragraphe. Notons T le sous-tore diagonal de G et, pour $t \in T$, notons $(t_k)_{k=1,\dots,d}$ ses coefficients diagonaux. Notons Σ l'ensemble des racines de T dans G. Il s'identifie à l'ensemble des couples $(k, l) \in$

$\{1,...,d\}^2$ tels que $k \neq l$: pour un tel couple (k,l), la racine correspondante $\alpha_{k,l}$ est donnée par $\alpha_{k,l}(t) = t_k t_l^{-1}$. L'automorphisme θ agit sur Σ. On a $\theta(\alpha_{k,l}) = \alpha_{d+1-l,d+1,k}$. Pour $\alpha \in \Sigma$, on pose $N\alpha = \alpha + \theta(\alpha)$ si $\alpha \neq \theta(\alpha)$, $N\alpha = \alpha$ si $\alpha = \theta(\alpha)$. Kottwitz et Shelstad distinguent trois types de racines. On traduit explicitement leur description ainsi : une racine $\alpha_{k,l}$ est de type R_1 si $k \neq d+1-l$ et k et l sont tous deux différents de $(d+1)/2$, de type R_2 si k ou l est égal à $(d+1)/2$, de type R_3 si $k = d+1-l$.

Notons T_θ la composante neutre du groupe des points fixes de θ dans T. Un élément $t \in T$ appartient à T_θ si et seulement si $t_{(d+1)/2} = 1$ et $t_{d+1-k} = t_k^{-1}$ pour $k \neq (d+1)/2$. Le groupe T_θ est un sous-tore maximal de $G_{\tilde{\theta}}$. Notons Σ_θ l'ensemble des racines de T_θ dans $G_{\tilde{\theta}}$. Pour $\alpha \in \Sigma$, notons α_{res} la restriction de α à T_θ. Si α est de type R_1 ou R_2, α_{res} appartient à Σ_θ. Si α est de type R_3, $\alpha_{res}/2$ appartient à Σ_θ (en adoptant une notation additive usuelle).

Posons $\hat{G} = GL_d(\mathbb{C})$, $\hat{\theta} = \hat{\theta}_d$, notons $\hat{T}$ le sous-tore diagonal de $\hat{G}$ et $\hat{G}_{\hat{\theta}}$, resp. $\hat{T}_{\hat{\theta}}$, la composante neutre du sous-groupe des points fixes de $\hat{\theta}$ dans $\hat{G}$, resp. $\hat{T}$. On note $\check{\Sigma}$ l'ensemble des racines de $\hat{T}$ dans $\hat{G}$, qui s'identifie au même ensemble de couples que précédemment. On note $\check{\alpha}_{k,l}$ la racine associée à (k,l). On note $\check{\Sigma}_{\hat{\theta}}$ l'ensemble des racines de $\hat{T}_{\hat{\theta}}$ dans $\hat{G}_{\hat{\theta}}$. Pour $\check{\alpha} \in \check{\Sigma}$, on note $\check{\alpha}_{res}$ sa restriction à $\hat{T}_{\hat{\theta}}$. Cette opération de restriction vérifie des propriétés similaires à celles décrites ci-dessus. On a plongé $\hat{H}$ dans $\hat{G}$. Par ce plongement, $\hat{T}_{\hat{\theta}}$ s'identifie à un sous-tore maximal de $\hat{H}$. On note $\check{\Sigma}_H$ l'ensemble des racines de $\hat{T}_{\hat{\theta}}$ dans $\hat{H}$. Cet ensemble est réunion de deux sous-ensembles évidents $\check{\Sigma}_{H^-}$ et $\check{\Sigma}_{H^+}$.

L'ensemble $\check{\Sigma}$ s'identifie naturellement à l'ensemble de coracines associé au système de racines Σ. La bijection est évidemment $\alpha_{k,l} \mapsto \check{\alpha}_{k,l}$.

Attention : l'ensemble $\check{\Sigma}_{\hat{\theta}}$ ne s'identifie pas à l'ensemble de coracines associé à Σ_θ. Ces ensembles de racines sont tous deux de type B_d. Il y a toutefois une bijection naturelle entre Σ_θ et $\check{\Sigma}_{\hat{\theta}}$: pour $\beta \in \Sigma_\theta$, on choisit $\alpha \in \Sigma$ tel que $\beta = \alpha_{res}$; on associe à β l'élément $(\check{\alpha})_{res}$ de $\check{\Sigma}_{\hat{\theta}}$. Cela ne dépend pas du choix de α.

2.3 Description galoisienne du tore

Pour une extension finie F' de F, on note $\Phi_{F'}$ l'ensemble des homomorphismes de F-algèbres de F' dans $\bar{F}$. On a dit que l'on considérait F' comme un sous-corps de $\bar{F}$. Il revient au même de dire que l'on fixe un élément privilégié $\phi_{F'} \in \Phi_{F'}$, à savoir l'identité.

Pour $i \in I^*$, on pose $\Phi_i = \Phi_{F_i}$ et $\phi_i = \phi_{F_i}$. Pour $i \in I \setminus I^*$, on note Φ_i l'ensemble des homomorphismes de F-algèbres de F_i dans F. Il y a deux homomorphismes de $F_{\pm i}$-algèbres de F_i dans $F_{\pm i}$, notons-les ψ_i^1 et ψ_i^2. Alors $\Phi_i = \{\phi \circ \psi_i^1; \phi \in \Phi_{F_{\pm i}}\} \sqcup \{\phi \circ \psi_i^2; \phi \in \Phi_{F_{\pm i}}\}$. On note simplement Φ_i^1 et Φ_i^2 les deux termes de cette décomposition et on pose $\phi_i^1 = \phi_{F_{\pm i}} \circ \psi_i^1$, $\phi_i^2 = \phi_{F_{\pm i}} \circ \psi_i^2$.

On peut choisir, et on choisit, un élément $g_0 \in G_{\tilde{\theta}}(\bar{F})$ et une bijection

$$\iota : \bigsqcup_{i \in I} \Phi_i \to \{1,...,d\} \setminus \{(d+1)/2\}$$

vérifiant les conditions ci-dessous. Pour $i \in I$, on pose $K_i = \iota(\Phi_i)$. Si $i \in I^*$, on pose $k_i = \iota(\phi_i)$. Si $i \in I \setminus I^*$, on pose $K_i^b = \iota(\Phi_i^b)$ et $k_i^b = \iota(\phi_i^b)$ pour $b = 1,2$. Alors

- $\bigsqcup_{i \in I^-} K_i = \{1,...,(d^- - 1)/2\} \cup \{d - (d^- - 3)/2, ...d\}$;
- $\bigsqcup_{i \in I^+} K_i = \{d^- + 1)/2, ...d - (d^- - 1)/2\} \setminus \{(d+1)/2\}$;
- pour $i \in I$ et $\phi \in \Phi_i$, $\iota(\phi \circ \tau_i) = d + 1 - \iota(\phi)$.

• pour $i \in I^*$, $k_i < (d+1)/2$;
• pour $i \in I \setminus I^*$ et $k \in K_i$, on a $k < (d+1)/2$ si $k \in K_i^1$ et $k > (d+1)/2$ si $k \in K_i^2$;
• $g_0 T^\diamond g_0^{-1} = T$;
• pour $t^\diamond = (t_D^\diamond, (t_i^\diamond)_{i\in I}) \in T(F)$, posons $t = g_0 t^\diamond g_0^{-1}$; alors on a $t_{(d+1)/2} = t_D^\diamond$ et, pour $i \in I$ et $\phi \in \Phi_i$, $t_{\iota(\phi)} = \phi(t_i^\diamond)$.

Notons Ω le sous-groupe des éléments du groupe de Weyl de T dans GL_d qui sont fixés par θ. Il s'identifie au groupe des permutations ω de l'ensemble $\{1,...,d\}$ telles que $\omega(d+1-k) = d+1-\omega(k)$ pour tout k. Posons $\Gamma = Gal(\bar{F}/F)$. Ce groupe agit naturellement sur $T^\diamond$. Via l'isomorphisme $t^\diamond \mapsto g_0 t^\diamond g_0^{-1}$, cette action se transporte en une action sur T. Pour simplifier les notations, on note $(\sigma, t) \mapsto \sigma(t)$ cette action. Il existe un unique homomorphisme $\sigma \mapsto \omega(\sigma)$ de Γ dans Ω de sorte que, pour tous $\sigma \in \Gamma$, $t \in T$, et $k \in \{1,...,d\}$, on ait $(\sigma(t))_k = \sigma(t_{\omega(\sigma)^{-1}(k)})$. Pour simplifier, on pose simplement $\sigma(k) = \omega(\sigma)(k)$. Evidemment, pour $i \in I$ et $\phi \in \Phi_i$, on a $\sigma(\iota(\phi)) = \iota(\sigma \circ \phi)$. L'action que l'on vient de définir de Γ sur T conserve T_θ. L'action déduite sur l'ensemble des caractères de T_θ conserve Σ_θ.

On définit une action de Γ sur $\hat{T}$, par $(\sigma(\hat{t}))_k = \hat{t}_{\sigma^{-1}(k)}$. Cette action conserve $\hat{T}_{\hat{\theta}}$ et l'action déduite sur l'ensemble des caractères de $\hat{T}_{\hat{\theta}}$ conserve $\check{\Sigma}_{\hat{\theta}}$.

Dans la suite, T, $\hat{T}$ et l'ensemble $\{1,...,d\}$ seront toujours munis des actions galoisiennes que l'on vient de définir. Pour éviter les confusions, on note $T(\bar{F})^\Gamma$ plutôt que $T(F)$ le sous-groupe des points fixes par Γ dans $T(\bar{F})$. On pose $t_{\tilde{x}} = g_0 t_{\tilde{x}}^\diamond g_0^{-1}$. Remarquons que $t_{\tilde{x}}$ appartient à $T(\bar{F})^\Gamma$.

Pour tout $\beta \in \Sigma_\theta$, on note Γ_β le fixateur de β dans Γ, $\Gamma_{\pm\beta}$ le sous-groupe des éléments de Γ qui conservent $\{\pm\beta\}$, et F_β, resp. $F_{\pm\beta}$, le sous-corps des points fixes par Γ_β, resp. $\Gamma_{\pm\beta}$, dans $\bar{F}$. Fixons des a-data $(a_\beta)_{\beta\in\Sigma_\theta}$ et des χ-data $(\chi_\beta)_{\beta\in\Sigma_\theta}$, cf. [LS] paragraphes 2.2 et 2.5. Pour $\beta \in \Sigma_\theta$, a_β est un élément de $F_\beta^\times$. On a $a_{-\beta} = -a_\beta$ et $a_{\sigma(\beta)} = \sigma(a_\beta)$ pour tout $\sigma \in \Gamma$. Le terme χ_β est un caractère de $F_\beta^\times$. On a $\chi_{-\beta} = \chi_\beta^{-1}$ et $\chi_{\sigma(\beta)} = \chi_\beta \circ \sigma^{-1}$ pour tout $\sigma \in \Gamma$. Si $[F_\beta : F_{\pm\beta}] = 2$, la restriction de χ_β à $F_{\pm\beta}^\times$ est le caractère quadratique $sgn_{F_\beta/F_{\pm\beta}}$.

Remarquons que la bijection entre Σ_θ et $\check{\Sigma}_{\hat{\theta}}$ est Γ-équivariante. Par cette bijection, on peut, si on en a besoin, remplacer les ensembles d'indices de nos a-data et χ-data par $\check{\Sigma}_{\hat{\theta}}$. On peut aussi définir Γ_β,F_β etc... pour $\beta \in \check{\Sigma}_{\hat{\theta}}$.

2.4 Le facteur de transfert

Le facteur $\Delta_{H,\tilde{G}}(y, \tilde{x})$ est un produit de trois termes. Un terme $\Delta_I(y, \tilde{x})$ sur lequel nous reviendrons plus tard. Fixons un sous-ensemble $\underline{\Sigma}$ de représentants des orbites de l'action de $\Gamma \times \{1, \theta\}$ dans Σ. Le terme $\Delta_{II}(y, \tilde{x})$ est lui-même un produit de termes $\Delta_{II,\alpha}(y, \tilde{x})$, pour α dans un sous-ensemble de $\underline{\Sigma}$. C'est le sous-ensemble des $\alpha \in \underline{\Sigma}$ qui vérifient l'une des conditions suivantes :

(1) α est de type R_1 et $(\check{\alpha})_{res}$ n'appartient pas à $\check{\Sigma}_H$;

(2) α est de type R_2 et ni $(\check{\alpha})_{res}$, ni $2(\check{\alpha})_{res}$ n'appartiennent à $\check{\Sigma}_H$;

(3) α est de type R_3 et $(\check{\alpha})_{res}$ appartient à $\check{\Sigma}_H$.

Posons $\alpha = \alpha_{k,l}$. La condition (1) équivaut à, ou bien $k \in \{1,...,(d^- - 1)/2\} \cup \{d - (d^- - 3)/2, ..., d\}$ et $l \in \{d^- + 1)/2, ..., d - (d^- - 1)/2\} \setminus \{(d+1)/2\}$, ou bien $l \in \{1,...,(d^- - 1)/2\} \cup \{d - (d^- - 3)/2, ..., d\}$ et $k \in \{d^- + 1)/2, ..., d - (d^- - 1)/2\} \setminus \{(d+1)/2\}$. La condition (2) n'est jamais vérifiée. En effet, si α est de type R_2, soit k, soit l est égal à $(d+1)/2$. Supposons par exemple $l = (d+1)/2$. Si $k \in \{1,...,(d^- - 1)/2\} \cup \{d - (d^- - 3)/2, ..., d\}$,

$2(\check{\alpha})_{res}$ appartient à $\check{\Sigma}_{H^-}$. Si $k \in \{d^- + 1)/2, ..., d - (d^- - 1)/2\} \setminus \{(d+1)/2\}$, $(\check{\alpha})_{res}$ appartient à $\check{\Sigma}_{H^+}$. La condition (3) équivaut à $k = d + 1 - l$ et $k \in \{1, ..., (d^- - 1)/2\} \cup \{d - (d^- - 3)/2, ..., d\}$.

Pour α vérifiant (1), on a

$$\Delta_{II,\alpha}(y, \tilde{x}) = \chi_{\alpha_{res}}(\frac{N\alpha(t_{\tilde{x}}) - 1}{a_{\alpha_{res}}}).$$

Pour α vérifiant (3), on a

$$\Delta_{II,\alpha}(y, \tilde{x}) = \chi_{\alpha_{res}/2}(\frac{N\alpha(t_{\tilde{x}}) + 1}{2}).$$

Remarque. Dans la définition de [KS] p.36, il n'y a pas de dénominateur 2. Il nous semble qu'il faut modifier cette définition comme on vient de l'indiquer.

Le facteur $\Delta_{III}(y, \tilde{x})$ est donné en général par un produit dans des groupes d'hypercohomologie. En fait, notre choix de $T^\diamond$ comme commutant d'un sous-tore de $G_{\tilde{\theta}}$ le simplifie. Le cocycle v de [KS] lemme 4.4.A est trivial : avec les notations de cette référence, on a $\delta^* = m(\delta) = t^\diamond_{\tilde{x}}$, $g = 1$, et $u(\sigma) = 1$ car $G \times \{1, \theta\}$ est déployé, donc $v(\sigma) = gu(\sigma)\sigma(g)^{-1} = 1$. Alors, d'après [KS] p.63, le facteur $\Delta_{III}(y, \tilde{x})$ se décrit de la façon suivante. On définira plus loin un certain cocycle $a^\diamond \in H^1(W_F, \hat{T})$ (le groupe W_F agit sur $\hat{T}$ via l'homomorphisme naturel de W_F dans Γ). Par l'isomorphisme de Langlands entre ce groupe de cohomologie et le groupe des caractères continus de $T(\bar{F})^\Gamma$, le cocycle $a^\diamond$ définit un caractère $\mathbf{a}^\diamond$ de $T(\bar{F})^\Gamma$. Alors

$$\Delta_{III}(y, \tilde{x}) = \mathbf{a}^\diamond(t_{\tilde{x}}).$$

Décrivons $a^\diamond$. On dit qu'un élément $\beta \in \check{\Sigma}_{\hat{\theta}}$ est positif si β intervient dans l'action de $\hat{T}_{\hat{\theta}}$ dans le sous-groupe unipotent "triangulaire supérieur" de $\hat{G}_{\hat{\theta}}$. D'autre part, le groupe $\Gamma \times \{\pm 1\}$ agit sur $\check{\Sigma}_{\hat{\theta}}$: l'élément -1 du groupe $\{\pm 1\}$ agit par $\beta \mapsto -\beta$. Fixons un ensemble de représentants $\underline{\check{\Sigma}}_{\hat{\theta}}$ des orbites pour cette action. Pour tout $\beta \in \underline{\check{\Sigma}}_{\hat{\theta}}$, on définit $r_\beta : W_F \to \hat{T}$ de la façon suivante. Supposons d'abord que β soit asymétrique, c'est-à-dire que $-\beta$ n'appartienne pas à l'orbite de β pour Γ. On fixe un ensemble de représentants $\{w_n\}_{n=1,...,N}$ de $W_{F_\beta} \backslash W_F$.Pour tout n, on pose $\beta_n = w_n^{-1}\beta$. Pour tout $(n, w) \in \{1, ..., N\} \times W_F$, il y a un unique couple $(n', v_n(w)) \in \{1, ..., N\} \times W_{F_\beta}$ tel que $w_n w = v_n(w) w_{n'}$. On pose

$$r_\beta(w) = \left(\prod_{n=1,...,N; \beta_n > 0, w^{-1}\beta_n < 0} (\check{\beta}_n)(-1) \right) \left(\prod_{n=1,...,N} \check{\beta}_n(\chi_\beta(v_n(w))) \right).$$

Ici $\check{\beta}_n$ est la coracine associée à β_n : c'est un homomorphisme de $\mathbb{C}^\times$ dans $\hat{T}_{\hat{\theta}}$. Supposons maintenant que β soit symétrique, c'est-à-dire que $-\beta$ appartienne à l'orbite de β pour Γ. On fixe des éléments $w_0, w_1, ..., w_N$ de W_F de sorte que $w_0^{-1}\beta = -\beta$ et que l'application $n \mapsto \beta_n = w_n^{-1}\beta$ soit une bijection de $\{1, ..., N\}$ sur le sous-ensemble des éléments positifs de l'orbite de β. Pour $n \in \{1, ..., N\}$, on pose $w_{-n} = w_0 w_n$. Pour tout $(n, w) \in \{1, ..., N\} \times W_F$, il existe un unique couple $(n', v_n(w)) \in \{\pm 1, ..., \pm N\} \times W_{F_\beta}$ tel que $w_n w = v_n(w) w_{n'}$. On pose

$$r_\beta(w) = \prod_{n=1,...,N} \check{\beta}_n(\chi_\beta(v_n(w))).$$

On pose ensuite
$$r = \prod_{\beta \in \check{\underline{\Sigma}}_{\hat{\theta}}} r_\beta.$$

C'est une application de W_T dans $\hat{T}_{\hat{\theta}}$. D'autre part, le groupe Ω s'identifie au groupe de Weyl de $\hat{T}_{\hat{\theta}}$ dans $\hat{G}_{\hat{\theta}}$. Modulo le choix d'un épinglage, on définit une section de Springer $n : \Omega \to \hat{G}_{\hat{\theta}}$. Introduisons le L-groupe de T, qui est le produit semi-direct ${}^L T = \hat{T} \rtimes W_F$. On définit une application
$$m : {}^L T \to G_{\hat{\theta}} \times W_F$$
par $m(\hat{t}, w) = (\hat{t}r(w)n(\omega(w)), w)$ (on note $\omega(w)$ l'image par ω de l'image de w dans Γ). C'est un homomorphisme. Remarquons que le groupe de Weyl $\Omega_{\hat{H}}$ de $\hat{T}_{\hat{\theta}}$ dans $\hat{H}$ est naturellement un sous-groupe de Ω et que ω prend ses valeurs dans ce sous-groupe. D'autre part, tout élement de $\check{\Sigma}_H$ est multiple positif d'un élément de $\check{\Sigma}_{\hat{\theta}}$, ce qui permet de définir χ_β pour $\beta \in \check{\Sigma}_H$: si $\beta = r\beta'$, avec $r > 0$ et $\beta' \in \check{\Sigma}_{\hat{\theta}}$, on pose $\chi_\beta = \chi_{\beta'}$. On peut alors remplacer dans les constructions ci-dessus le groupe $\hat{G}_{\hat{\theta}}$ par $\hat{H}$. On affecte d'un indice H les objets relatifs à $\hat{H}$. On définit donc un homomorphisme $m_H : {}^L T \to \hat{H} \times W_F = {}^L H$. On peut considérer que m prend ses valeurs dans $\hat{G} \times W_F = {}^L G$. L'homomorphisme ${}^L\xi \circ m_H$ prend aussi ses valeurs dans ${}^L G$. On vérifie qu'il existe un cocycle $a^\diamond$ de W_F dans $\hat{T}$ de sorte que
$${}^L\xi \circ m_H(\hat{t}, w) = a^\diamond(w) m(\hat{t}, w)$$
pour tout $(\hat{t}, w) \in {}^L T$.

2.5 Le terme $\Delta_I(y, \tilde{x})$

Pour tout $i \in I$, choisissons $X_i \in F_i^\times$ tel que $\tau_i(X_i) = -X_i$. Notons X l'élément de $\mathfrak{t}^\flat(F)$ qui agit par multiplication par X_i sur F_i pour tout $i \in I$, et par 0 sur D. Supposons X régulier dans $\mathfrak{g}_\theta(F)$. Introduisons un groupe spécial orthogonal quasi-déployé H'^+ d'un espace quadratique de dimension $d^+ + 1$ sur F. Le groupe $H' = H^- \times H'^+$ est un groupe endoscopique de G_θ. Les classes de conjugaison, ou de conjugaison stable, d'éléments semi-simples réguliers dans les algèbres de Lie des groupes spéciaux orthogonaux se paramètrent essentiellement comme en 1.3. En particulier, on peut introduire des éléments semi-simples réguliers $Y^- \in \mathfrak{h}^-(F)$ et $Y^+ \in \mathfrak{h}'^+(F)$ dont les classes de conjugaison stable sont paramétrées respectivement par $(I^-, (F_{\pm i})_{i \in I^-}, (F_i)_{i \in I^-}, (X_i)_{i \in I^-})$ et $(I^+, (F_{\pm i})_{i \in I^+}, (F_i)_{i \in I^+}, (X_i)_{i \in I^+})$. Posons $Y = (Y^-, Y^+) \in \mathfrak{h}'(F)$. Supposons de plus X assez proche de 0. Les classes de conjugaison stable de $exp(Y)$ et de $exp(X)$ se correspondent. On définit le facteur de transfert $\Delta_{H', G_\theta}(exp(Y), exp(X))$ relatif à l'épinglage de G_θ que l'on a fixé. Comme dans le paragraphe précédent, c'est le produit de trois termes que l'on peut calculer en utilisant les mêmes a-data et χ-data que l'on a fixées. Il suffit de comparer les définitions pour voir que les deux facteurs $\Delta_I(exp(Y), exp(X))$ et $\Delta_I(y, \tilde{x})$ sont égaux. Or on a calculé le premier dans [W] chapitre X pour un certain choix de a-data. Décrivons le résultat. Posons $X^T = g_0 X g_0^{-1}$ (en notant comme une conjugaison l'action adjointe). On choisit pour a-data la famille définie par $a_\beta = \beta(X^T)$ pour tout $\beta \in \Sigma_\theta$. On note Q_X le polynôme caractéristique de X agissant dans V. Alors

$$(1) \qquad \Delta_I(y, \tilde{x}) = \prod_{i \in I^{-*}} sgn_{F_i/F_{\pm i}}(\eta c_i Q'_X(X_i)),$$

cf. [W] proposition X.8.

Remarques. Dans cette référence, on avait calculé le facteur $\Delta_{H',G_\theta}(exp(Y), exp(X))$ tout entier, en supposant que F était non-archimédien. Mais, avec notre choix de a-data, le facteur $\Delta_{II}(exp(Y), exp(X))$ est trivial. Pour F non-archimédien, le facteur $\Delta_{III}(exp(Y), exp(X))$ est lui-aussi trivial pour X proche de 0. La démonstration consistait donc au seul calcul de $\Delta_I(exp(Y), exp(X))$. Le calcul de ce terme est le même, que F soit non-archimédien ou réel. Par ailleurs, le terme que l'on a noté ici η est le même que dans [W], bien que sa définition soit un peu différente. Le terme que l'on a noté c_i est égal à $[F_i : F]^{-1}c_i$ dans les notations de [W].

On a supposé X proche de 0. On peut lever cette hypothèse en remarquant que la formule ci-dessus est insensible au remplacement de X par $\lambda^2 X$ pour $\lambda \in F^\times$. Soit $i \in I$. Puisque $y_i\tau_i(y_i) = 1$, l'élément

$$(2) \qquad X_i = (y_i - 1)(1 + y_i)^{-1}$$

vérifie la propriété requise $\tau_i(X_i) = -X_i$. On peut choisir, et on choisit, cet élément X_i dans les constructions ci-dessus. On vérifie que la forte régularité de $\tilde{x}$ entraîne la régularité de X. Remarquons que l'on a la formule d'inversion

$$(3) \qquad y_i = (1 + X_i)(1 - X_i)^{-1}.$$

2.6 Description de certaines orbites

Pour $i \in I^*$, notons Γ_i, resp. $\Gamma_{\pm i}$, le fixateur de F_i, resp. $F_{\pm i}$ dans Γ et étendons l'élément τ_i de $Gal(F_i/F_{\pm i})$ en un élément de Γ. On a donc $\Gamma_{\pm i} = \Gamma_i \cup \Gamma_i\tau_i$.

Fixons $i \in I^-$, $j \in I^+$. Posons

$$\Sigma(i,j) = \{\alpha_{k,l}; k \in K_i, l \in K_j\} \cup \{\alpha_{l,k}; k \in K_i, l \in K_j\},$$

$$\Sigma(i,j)_{res} = \{\alpha_{res}; \alpha \in \Sigma(i,j)\}.$$

Les orbites dans $\Sigma(i,j)_{res}$ pour l'action de Γ s'identifient aux orbites dans $\Sigma(i,j)$ pour l'action de $\Gamma \times \{1,\theta\}$, ou encore aux orbites dans $K_i \times K_j$ pour l'action de Γ. Remarquons que l'on a l'égalité $-(\alpha_{k,l})_{res} = (\alpha_{d+1-k,d+1-l})_{res}$.

Si $i \notin I^{-*}$ ou $j \notin I^{+*}$, $\Sigma(i,j)_{res}$ est formé d'orbites asymétriques. En effet, si par exemple $i \notin I^{-*}$, k et $d+1-k$ appartiennent l'un à K_i^1, l'autre à K_i^2, ils ne peuvent donc pas appartenir à la même orbite galoisienne.

Supposons $i \in I^{-*}$ et $j \in I^{+*}$. Soit $\Xi(i,j)$ un ensemble de représentants de $\Gamma_i\backslash\Gamma/\Gamma_j$. On vérifie que $((k_i, \xi(k_j)))_{\xi\in\Xi(i,j)}$ est une famille de représentants des orbites de Γ dans $K_i \times K_j$. Soit $\xi \in \Xi(i,j)$. Il y a un élément $\xi' \in \Xi(i,j)$ tel que $\tau_i\xi\tau_j \in \Gamma_i\xi'\Gamma_j$. Alors la Γ-orbite de $(\alpha_{k_i,\xi(k_j)})_{res}$ est symétrique si $\xi' = \xi$ et asymétrique si $\xi' \neq \xi$. Cela résulte des égalités

$$(1) \qquad -(\alpha_{k_i,\xi(k_j)})_{res} = (\alpha_{d+1-k_i,d+1-\xi(k_j)})_{res} = (\alpha_{\tau_i^{-1}(k_i),\xi\tau_j(k_j)})_{res} = \tau_i^{-1}(\alpha_{k_i,\tau_i\xi\tau_j(k_j)})_{res}.$$

On fixe un sous-ensemble $\Xi(i,j)_\pm$ de $\Xi(i,j)$ tel que, pour tout $\xi \in \Xi(i,j)$, l'intersection $\Xi(i,j)_\pm \cap \{\xi,\xi'\}$ ait exactement un élément. Alors l'ensemble des $(\alpha_{k_i,\xi(k_j)})_{res}$ pour $\xi \in \Xi(i,j)_\pm$ est un ensemble de représentants des orbites dans $\Sigma(i,j)_{res}$ pour l'action de $\Gamma \times \{\pm 1\}$.

Fixons maintenant $i \in I^-$. Posons

$$\Sigma(i) = \{\alpha_{k,d+1-k}; k \in K_i\},$$

$$\Sigma(i)_{res} = \{\alpha_{res}; \alpha \in \Sigma(i)\},\ \frac{1}{2}\Sigma(i)_{res} = \{\frac{1}{2}\alpha_{res}; \alpha \in \Sigma(i)\}.$$

Les orbites dans $\Sigma(i)_{res}$ ou $\frac{1}{2}\Sigma(i)_{res}$ pour l'action de Γ s'identifient aux orbites dans $\Sigma(i)$ pour l'action de $\Gamma \times \{1, \theta\}$ ou Γ (puisque θ agit trivialement sur $\Sigma(i)$), ou encore aux orbites dans K_i pour l'action de Γ. Il y en a deux si $i \notin I^{-*}$, une si $i \in I^{-*}$. Pour $i \notin I^{-*}$, les deux orbites dans $\Sigma(i)_{res}$ ou $\frac{1}{2}\Sigma(i)_{res}$ sont asymétriques. Si $i \in I^{-*}$, l'unique orbite est symétrique.

On a choisi un ensemble $\underline{\Sigma}$ de représentants des orbites dans Σ pour l'action de $\Gamma \times \{1, \theta\}$. Pour $i \in I^-$ et $j \in I^+$, on pose $\underline{\Sigma}(i,j) = \underline{\Sigma} \cap \Sigma(i,j)$. Si $i \in I^{-*}$ et $j \in I^{+*}$, on suppose que $\underline{\Sigma}(i,j) = \{\alpha_{k_i, \xi(k_j)}; \xi \in \Xi(i,j)\}$. Pour $i \in I^-$, on pose $\underline{\Sigma}(i) = \underline{\Sigma} \cap \Sigma(i)$. Si $i \in I^{-*}$, on suppose que $\underline{\Sigma}(i) = \{\alpha_{k_i, d+1-k_i}\}$.

On peut dans tout cela remplacer les $\alpha_{k,l}$ par les $\check{\alpha}_{k,l}$, en ajoutant des $\check{}$ dans les définitions. Du côté des L-groupes, c'est le groupe W_F qui intervient plutôt que Γ. Il convient alors de considérer que, pour $i \in I^{-*}$ et $j \in I^{+*}$, $\Xi(i,j)$ est un ensemble de représentants de $W_{F_i} \backslash W_F / W_{F_j}$ et, pour $i \in I^*$, τ_i est un élément de $W_{F_{\pm i}}$. On a choisi des ensembles $\check{\underline{\Sigma}}_{\check{\theta}}$, resp. $\check{\underline{\Sigma}}_H$, de représentants des orbites dans $\check{\Sigma}_{\check{\theta}}$, resp. $\check{\Sigma}_H$, pour l'action de $\Gamma \times \{\pm 1\}$. Pour $i \in I^-$ et $j \in I^+$, posons $\check{\underline{\Sigma}}(i,j)_{res} = \check{\underline{\Sigma}}_{\check{\theta}} \cap \check{\Sigma}(i,j)_{res}$. Si $i \in I^{-*}$ et $j \in I^{+*}$, on suppose que $\check{\underline{\Sigma}}(i,j)_{res} = \{(\check{\alpha}_{k_i, \xi(k_j)})_{res}; \xi \in \Xi(i,j)_{\pm}\}$. Pour $i \in I^-$, posons $\check{\underline{\Sigma}}(i)_{res} = \check{\underline{\Sigma}}_H \cap \check{\Sigma}(i)_{res}$. On suppose que $\check{\underline{\Sigma}}_{\check{\theta}} \cap \frac{1}{2}\check{\Sigma}(i)_{res} = \{\frac{1}{2}\beta; \beta \in \check{\underline{\Sigma}}(i)_{res}\}$. Si $i \in I^{-*}$, on suppose $\check{\underline{\Sigma}}(i)_{res} = \{(\alpha_{k_i, d+1-k_i})_{res}\}$.

2.7 Choix de χ-data

Pour tout $i \in I^*$, fixons un caractère χ_i de $F_i^\times$ dont la restriction à $F_{\pm i}$ coïncide avec $sgn_{F_i/F_{\pm i}}$.

Fixons $i \in I^-$, $j \in I^+$. Si $i \notin I^{-*}$ ou $j \notin I^{+*}$, $\Sigma(i,j)_{res}$ est formé d'orbites asymétriques. On choisit $\chi_\beta = 1$ pour tout $\beta \in \Sigma(i,j)_{res}$. Supposons $i \in I^{-*}$ et $j \in I^{+*}$. Soit $\xi \in \Xi(i,j)$, posons $\beta = (\alpha_{k_i, \xi(k_j)})_{res}$. Alors F_β est le composé des extensions F_i et $\xi(F_j)$. On pose $\chi_\beta = \chi_i \circ Norm_{F_\beta/F_i}$. Ensuite, pour $\sigma \in \Gamma$, on pose $\chi_{\sigma(\beta)} = \chi_\beta \circ \sigma^{-1}$. Montrons que ces choix conviennent. On doit vérifier

(1) pour $\beta \in \Sigma(i,j)_{res}$, $\chi_{-\beta} = \chi_\beta^{-1}$;

(2) soit $\beta \in \Sigma(i,j)_{res}$, supposons l'orbite de β symétrique ; alors la restriction de χ_β à $F_{\pm\beta}$ est le caractère $sgn_{F_\beta/F_{\pm\beta}}$.

On peut se limiter aux β de la forme $\beta = (\alpha_{k_i, \xi(k_j)})_{res}$ pour $\xi \in \Xi(i,j)$. Introduisons ξ' comme dans le paragraphe précédent et fixons $\gamma \in \Gamma_i$ tel que $\tau_i \xi \tau_j \in \gamma \xi' \Gamma_j$. Posons $\beta' = (\alpha_{k_i, \xi'(k_j)})_{res}$. L'égalité 2.6(1) nous dit que $-\beta = \tau_i^{-1} \gamma \beta'$. Donc

$$\chi_{-\beta} = \chi_{\beta'} \circ \gamma^{-1} \tau_i = \chi_i \circ Norm_{F_{\beta'}/F_i} \circ \gamma^{-1} \tau_i.$$

Pour deux extensions $F' \subset F''$ de F et pour $\delta \in \Gamma$, on a l'égalité $Norm_{F''/F'} \circ \delta = \delta \circ Norm_{\delta^{-1}(F'')/\delta^{-1}(F')}$. On en déduit ici

$$\chi_{-\beta} = \chi_i \circ \tau_i \circ Norm_{F_\beta/F_i}.$$

Mais $\chi_i \circ \tau_i = \chi_i^{-1}$ et l'égalité précédente entraîne (1).

Supposons l'orbite de β symétrique. Le corps $F_{\pm\beta}$ contient $F_{\pm i}$: un élément de $\Gamma_{\pm\beta}$ envoie forcément k_i sur k_i ou $d+1-k_i$, donc appartient à $\Gamma_{\pm i}$. Le corps F_β est le composé de F_i et de $F_{\pm\beta}$: un élément de $\Gamma_{\pm\beta}$ appartient à Γ_β si et seulement s'il fixe la première composante k_i de β, c'est-à-dire si et seulement s'il appartient à Γ_i. Puisque l'orbite de β est symétrique, F_β est une extension quadratique de $F_{\pm\beta}$, donc F_i et $F_{\pm\beta}$ sont des extensions disjointes de $F_{\pm i}$. Alors la restriction de χ_β à $F_{\pm\beta}$ est égal à $(\chi_i)_{|F_{\pm i}} \circ Norm_{F_{\pm\beta}/F_{\pm i}}$, c'est-à-dire à $sgn_{F_i/F_{\pm i}} \circ Norm_{F_{\pm\beta}/F_{\pm i}}$. Il est connu que c'est bien le caractère $sgn_{F_\beta/F_{\pm\beta}}$, d'où (2).

Fixons maintenant seulement $i \in I^-$. Si $i \notin I^{-*}$, les deux Γ-orbites dans $\frac{1}{2}\Sigma(i)_{res}$ sont asymétriques. On choisit $\chi_\beta = 1$ pour tout élément β de cet ensemble. Si $i \in I^{-*}$, $\frac{1}{2}\Sigma(i)_{res}$ est formé d'une unique orbite symétrique. Posons $\beta = \frac{1}{2}(\alpha_{k_i,d+1-k_i})_{res}$. Alors $F_\beta = F_i$, $F_{\pm\beta} = F_{\pm i}$. On choisit $\chi_\beta = \chi_i$ et $\chi_{\sigma(\beta)} = \chi_i \circ \sigma^{-1}$ pour tout $\sigma \in \Gamma$.

2.8 Calcul de $\Delta_{II}(y, \tilde{x})$

Considérons l'ensemble des éléments de Σ qui vérifient la condition 2.4(1). C'est la réunion sur les couples $(i,j) \in I^- \times I^+$ des ensembles $\Sigma(i,j)$. Nos choix de χ-data et d'ensemble $\underline{\Sigma}$ entraînent que la contribution à $\Delta_{II}(y,\tilde{x})$ des éléments de Σ vérifiant la condition 2.4(1) est

$$\prod_{i\in I^{-*}, j\in I^{+*}} \prod_{\xi\in\Xi(i,j)} \Delta_{II,\alpha_{k_i,\xi(k_j)}}(y,\tilde{x}).$$

Fixons i, j, ξ intervenant dans ce produit. Posons $\beta = (\alpha_{k_i,\xi(k_j)})_{res}$. On a choisi

$$a_\beta = \beta(X^T) = X^T_{k_i} - X^T_{\xi(k_j)} = X_i - \xi(X_j).$$

On a

$$\alpha_{k_i,\xi(k_j)}(t_{\tilde{x}}) = t_{\tilde{x},k_i} t^{-1}_{\tilde{x},\xi(k_j)} = c_i\tau_i(x_i)^{-1}\xi(c_j^{-1}\tau_j(x_j)),$$

$$(\theta(\alpha_{k_i,\xi(k_j)}))(t_{\tilde{x}}) = \alpha_{\xi\tau_j(k_j),\tau_i(k_i)}(t_{\tilde{x}}) = \xi(c_j x_j^{-1}) c_i^{-1} x_i.$$

On a $x_i/\tau_i(x_i) = y_i$ et $x_j/\tau_j(x_j) = y_j$. Donc

$$N\alpha_{k_i,\xi(k_j)}(t_{\tilde{x}}) = y_i \xi(y_j)^{-1}.$$

On a $\chi_\beta = \chi_i \circ Norm_{F_\beta/F_i}$. D'où

$$\Delta_{II,\alpha_{k_i,\xi(k_j)}}(y,\tilde{x}) = \chi_i \circ Norm_{F_\beta/F_i}((y_i\xi(y_j)^{-1} - 1)(X_i - \xi(X_j))^{-1}).$$

Pour $\lambda \in F_\beta$, on a

$$Norm_{F_\beta/F_i}(\lambda) = \prod_{\sigma\in\Gamma_i/(\Gamma_i\cap\xi\Gamma_j\xi^{-1})} \sigma(\lambda).$$

Puisque y_i et X_i sont fixes par Γ_i, on obtient

$$\Delta_{II,\alpha_{k_i,\xi(k_j)}}(y,\tilde{x}) = \chi_i\Big(\prod_{\sigma\in\Gamma_i/(\Gamma_i\cap\xi\Gamma_j\xi^{-1})} \sigma\xi(y_j)^{-1}(y_i - \sigma\xi(y_j))(X_i - \sigma\xi(X_j))^{-1}\Big).$$

On doit faire le produit de ces expressions quand ξ décrit $\Xi(i,j)$. Mais quand ξ décrit $\Xi(i,j)$ et σ décrit $\Gamma_i/(\Gamma_i\cap\xi\Gamma_j\xi^{-1})$, le produit $\sigma\xi$ décrit Γ/Γ_j. Remarquons que le nombre d'éléments de cet ensemble est $[F_j : F]$ et que, puisque $Norm_{F_j/F_{\pm j}}(y_j) = 1$, a fortiori $Norm_{F_j/F}(y_j) = 1$. On obtient

$$\prod_{\xi\in\Xi(i,j)} \Delta_{II,\alpha_{k_i,\xi(k_j)}}(y,\tilde{x}) = \chi_i(P_j(y_i)Q_j(X_i)^{-1}),$$

où P_j, resp. Q_j, est le polynôme caractéristique de y_j, resp. X_j, agissant sur F_j. La contribution à $\Delta_{II}(y,\tilde{x})$ des éléments de Σ vérifiant la condition 2.4(1) est donc

$$(1) \qquad \prod_{i\in I^{-*}, j\in I^{+*}} \chi_i(P_j(y_i)Q_j(X_i)^{-1}).$$

Considérons maintenant l'ensemble des éléments de Σ qui vérifient la condition 2.4(3). C'est la réunion sur les $i \in I^-$ des ensembles $\Sigma(i)$. Nos choix de χ-data et d'ensemble $\underline{\Sigma}$ entraînent que la contribution à $\Delta_{II}(y,\tilde{x})$ des éléments de Σ vérifiant la condition 2.4(3) est

$$\prod_{i\in I^{-*}} \Delta_{II,\alpha_{k_i,d+1-k_i}}(y,\tilde{x}).$$

Soit $i \in I^{-*}$. On a $N\alpha_{k_i,d+1-k_i} = \alpha_{k_i,d+1-k_i}$, et on calcule comme ci-dessus $N\alpha_{k_i,d+1-k_i}(t_{\tilde{x}}) = y_i$. Posons $\beta = \frac{1}{2}(\alpha_{k_i,d+1-k_i})_{res}$. On a choisi $\chi_\beta = \chi_i$ et on obtient

$$\Delta_{II,\alpha_{k_i,d+1-k_i}}(y,\tilde{x}) = \chi_i((y_i+1)/2).$$

La contribution à $\Delta_{II}(y,\tilde{x})$ des éléments de Σ qui vérifient la condition 2.4(3) est donc

$$(2) \qquad \prod_{i\in I^{-*}} \chi_i((y_i+1)/2).$$

2.9 Début du calcul de $\Delta_{III}(y,\tilde{x})$

Parce que T est un produit de tores induits, l'isomorphisme entre $H^1(W_F,\hat{T})$ et le groupe des caractères de $T(\bar{F})^\Gamma$ s'explicite aisément. Décrivons le résultat dans le cas qui nous intéresse. Pour $i \in I^*$, l'application

$$\begin{array}{ccc} W_{F_i} & \to & \mathbb{C}^\times \\ w & \mapsto & a^\diamond(w)_{k_i} \end{array}$$

est un caractère de W_{F_i}, auquel correspond un caractère $\mathbf{a}_i^\diamond$ de $F_i^\times$. Pour $i \in I \setminus I^*$, on a deux applications

$$\begin{array}{ccc} W_{F_{\pm i}} & \to & \mathbb{C}^\times \\ w & \mapsto & a^\diamond(w)_{k_i^b} \end{array}$$

pour $b = 1,2$. Ce sont des caractères de $F_{\pm i}^\times$, dont se déduisent deux caractères $\mathbf{a}_i^{b,\diamond}$ de $F_{\pm i}^\times$. Enfin l'application

$$\begin{array}{ccc} W_F & \to & \mathbb{C}^\times \\ w & \mapsto & a^\diamond(w)_{(d+1)/2} \end{array}$$

est un caractère de W_F, dont se déduit un caractère $\mathbf{a}_D^\diamond$ de $F^\times$. On a alors l'égalité

$$\mathbf{a}^\diamond(t_{\tilde{x}}) = \mathbf{a}_D^\diamond(t_{\tilde{x},(d+1)/2}) \left(\prod_{i\in I\setminus I^*} \mathbf{a}_i^{1,\diamond}(t_{\tilde{x},k_i^1})\mathbf{a}_i^{2,\diamond}(t_{\tilde{x},k_i^2})\right) \left(\prod_{i\in I^*} \mathbf{a}_i^\diamond(t_{\tilde{x},k_i})\right),$$

c'est-à-dire

$$(1)\qquad \mathbf{a}^{\diamond}(t_{\tilde{x}})=\mathbf{a}_D^{\diamond}(c_Dx_D^{-1})\left(\prod_{i\in I\setminus I^*}\mathbf{a}_i^{1,\diamond}(\psi_i^1(c_i\tau_i(x_i)^{-1}))\mathbf{a}_i^{2,\diamond}(\psi_i^2(c_i\tau_i(x_i)^{-1}))\right)$$
$$\left(\prod_{i\in I^*}\mathbf{a}_i^{\diamond}(c_i\tau_i(x_i)^{-1})\right).$$

Explicitons le cocycle $a^{\diamond}$. Le lemme X.4 de [W] calcule la section de Springer n relative à un épinglage convenable. Soit $w\in W_F$. Identifions $\omega(w)$ à une matrice de permutation. Pour $k\in\{1,...,d\}$, notons $s(k,w)$ le nombre d'éléments $l\in\{1,...,d\}$ tels que $l<k$ et $w^{-1}(l)>w^{-1}(k)$. Notons $S(w)$ la matrice diagonale de coefficients $S(w)_k=(-1)^{s(k,w)}$. Alors $n(\omega(w))=S(w)\omega(w)$. On a une formule similaire pour $n_H(\omega(w))$. Quand on tient compte de la façon dont on a plongé $\hat{H}$ dans $\hat{G}$, on obtient le résultat suivant. Pour $k\in\{1,...,d\}$, notons $s_H(k,w)$ le nombre d'éléments de l'ensemble suivant :

- si $k\in\{1,...,(d^--1)/2\}\cup\{d-(d^--3)/2,...,d\}$, c'est l'ensemble des $l\in\{1,...,(d^--1)/2\}\cup\{d-(d^--3)/2,...,d\}$ tels que $l<k$ et $w^{-1}(l)>w^{-1}(k)$;

- si $k\in\{(d^-+1)/2,...,d-(d^--1)/2\}$, c'est l'ensemble des $l\in\{(d^-+1)/2,...,d-(d^--1)/2\}$ tels que $l<k$ et $w^{-1}(l)>w^{-1}(k)$.

Notons $S_H(w)$ la matrice diagonale de coefficients $S_H(w)_k=(-1)^{s_H(k,w)}$. Alors ${}^L\xi(n_H(\omega(w)))=S_H(w)\omega(w)$. La formule de 2.4 qui définit le cocycle $a^{\diamond}$ se récrit donc

$${}^L\xi(r_H(w))S_H(w)\omega(w)\rho(w)=a^{\diamond}(w)r(w)S(w)\omega(w),$$

ou encore, puisque $\rho(w)$ et $\omega(w)$ commutent,

$$a^{\diamond}(w)={}^L\xi(r_H(w))r(w)^{-1}S_H(w)S(w)^{-1}\rho(w).$$

Les calculs ci-dessus permettent déjà d'expliciter la matrice $S_H(w)S(w)^{-1}$. Notons $e(w)$ le nombre d'éléments de l'ensemble des $l\in\{1,...,(d^--1)/2\}$ tels que $w^{-1}(l)\geq d-(d^--3)/2$. Alors $S_H(w)S(w)^{-1}$ est la matrice diagonale de coefficients

$$(2)\qquad (S_H(w)S(w)^{-1})_k=\begin{cases}1 & \text{si } k\leq(d^--1)/2,\\ (-1)^{e(w)}, & \text{si } (d^-+1)/2\leq k\leq d-(d^--1)/2,\\ 1, & \text{si } k\geq d-(d^--3)/2 \text{ et } w^{-1}(k)\geq d-(d^--3)/2,\\ -1, & \text{si } k\geq d-(d^--3)/2 \text{ et } w^{-1}(k)\leq(d^--1)/2.\end{cases}$$

On a

$${}^L\xi(r_H(w))r(w)^{-1}=\left(\prod_{\beta\in\underline{\check{\Sigma}}_H}{}^L\xi(r_{H,\beta}(w))\right)\left(\prod_{\beta\in\underline{\check{\Sigma}}_{\hat{\theta}}}r_\beta(w)^{-1}\right).$$

Dans l'intersection $\check{\Sigma}_H\cap\check{\Sigma}_{\hat{\theta}}$, on peut supposer que l'on choisit les mêmes représentants d'orbites dans les deux produits. On voit alors que les contributions de cette intersection à chacun des produits sont inverses l'une de l'autre. Elles disparaissent. Il reste la contribution des éléments de $\check{\Sigma}_{\hat{\theta}}$ qui n'appartiennent pas à $\check{\Sigma}_H$ et celle des éléments de $\check{\Sigma}_H$ qui n'appartiennent pas à $\check{\Sigma}_{\hat{\theta}}$. Le second ensemble est la réunion sur les $i\in I^-$ des $\check{\Sigma}(i)_{res}$. Le premier ensemble est lui-même réunion de deux ensembles :

- la réunion sur les $(i,j)\in I^-\times I^+$ des $\check{\Sigma}(i,j)_{res}$;

- la réunion sur les $i\in I^-$ des $\frac{1}{2}\check{\Sigma}(i)_{res}$.

D'après nos choix d'ensembles de représentants d'orbites, on obtient

$$^L\xi(r_H(w))r(w)^{-1}=\left(\prod_{i\in I^-,j\in I^+}\prod_{\beta\in\check{\underline{\Sigma}}(i,j)_{res}}r_\beta(w)^{-1}\right)\left(\prod_{i\in I^-}\prod_{\beta\in\check{\underline{\Sigma}}(i)_{res}}{}^L\xi(r_{H,\beta}(w))r_{\beta/2}(w)^{-1}\right).$$

Le second produit se simplifie. En effet, pour $i\in I^-$ et $\beta\in\check{\underline{\Sigma}}(i)_{res}$, la seule différence dans les définitions de $^L\xi(r_{H,\beta}(w))$ et $r_{\beta/2}(w)$ provient des coracines qui interviennent dans les définitions : celles intervenant dans le second terme sont les doubles de celles intervenant dans le premier. Donc $r_{\beta/2}(w)={}^L\xi(r_{H,\beta}(w))^2$. D'autre part, soient $i\in I^-\setminus I^{-*}$, $j\in I^+$ et $\beta\in\check{\underline{\Sigma}}(i,j)_{res}$. L'orbite de β pour l'action de $\Gamma\times\{\pm1\}$ est asymétrique et l'action de Γ préserve la positivité : un élément $(\alpha_{k,l})_{res}$ de l'orbite est positif si $k\in K_i^1$ et négatif si $k\in K_i^2$. Donc $r_\beta(w)=1$ pour tout w. De même, pour $i\in I^-\setminus I^{-*}$ et $\beta\in\check{\underline{\Sigma}}(i)_{res}$, $r_{H,\beta}(w)=1$ pour tout w. On obtient

$$(3)\qquad ^L\xi(r_H(w))r(w)^{-1}=\left(\prod_{i\in I^{-*},j\in I^+}\prod_{\beta\in\check{\underline{\Sigma}}(i,j)_{res}}r_\beta(w)^{-1}\right)\left(\prod_{i\in I^{-*}}\prod_{\beta\in\check{\underline{\Sigma}}(i)_{res}}{}^L\xi(r_{H,\beta}(w))^{-1}\right).$$

2.10 Le caractère $\mathbf{a}_D^\diamond$

On doit calculer de $a^\diamond(w)_{(d+1)/2}$ pour $w\in W_F$. Le terme $\rho(w)_{(d+1)/2}$ vaut $\chi(w)$. Le terme $(S_H(w)S(w)^{-1})_{(d+1)/2}$ vaut $(-1)^{e(w)}$. Les termes $r_\beta(w)$ et $^L\xi(r_{H,\beta}(w))$ ont une $(d+1)/2$-ième composante égale à 1. On obtient

$$a^\diamond(w)_{(d+1)/2}=\chi(w)(-1)^{e(w)}.$$

Identifions le caractère $w\mapsto(-1)^{e(w)}$. Pour $i\in I^-$, notons $e_i(w)$ le nombre des $k\in K_i$ tels que $k\leq(d^--1)/2$ et $w^{-1}(k)\geq d-(d^--3)/2$. Pour $i\notin I^{-*}$, l'action galoisienne sur K_i conserve la positivité et $e_i(w)=0$. Donc

$$e(w)=\sum_{i\in I^{-*}}e_i(w).$$

Soit $i\in I^{-*}$. On peut choisir des représentants $(w_n)_{n=1,...,N}$ de $W_{F_{\pm i}}\backslash W_F$ de sorte que l'application $n\mapsto w_n^{-1}(k_i)$ soit une bijection de $\{1,...,N\}$ sur l'ensemble des éléments $k\in K_i$ tels que $k\leq(d^--1)/2$. Pour $n=1,...,N$, soit $(n',v_n(w))\in\{1,...,N\}\times W_{F_{\pm i}}$ tel que $w_nw=v_n(w)w_{n'}$. On a $w^{-1}w_n^{-1}(k_i)\geq d-(d^--3)/2$ si et seulement si $v_n(w)\in W_{F_{\pm i}}\setminus W_{F_i}$, ou encore si et seulement si $sgn_{F_i/F_{\pm i}}(v_n(w))=-1$. Donc $(-1)^{e_i(w)}=\prod_{n=1,...,N}sgn_{F_i/F_{\pm i}}(v_n(w))$. Le membre de droite de cette égalité définit le transfert du caractère $sgn_{F_i/F_{\pm i}}$ de $W_{F_{\pm i}}$ en un caractère de W_F. En termes de caractères de $F_{\pm i}^\times$ et $F^\times$, le transfert se traduit par la restriction. Le caractère $w\mapsto(-1)^{e_i(w)}$ de W_F correspond donc à la restriction à $F^\times$ du caractère $sgn_{F_i/F_{\pm i}}$ de $F_{\pm i}^\times$. D'où

$$\mathbf{a}_D^\diamond=\chi\prod_{i\in I^{-*}}(sgn_{F_i/F_{\pm i}})_{|F^\times}.$$

2.11 Calcul de $\mathbf{a}_i^{b,\diamond}$, pour $i \in I^- \setminus I^{-*}$

Soit $i \in I^- \setminus I^{-*}$. Pour $b = 1,2$, on doit calculer $a^\diamond(w)_{k_i^b}$ pour $w \in W_{F_{\pm i}}$. Le terme $\rho(w)_{k_i^b}$ vaut 1. Le terme $(S_H(w)S(w)^{-1})_{k_i^b}$ aussi : cela résulte de la formule 2.9(2) et, dans le cas $b = 2$, auquel cas $k_i^2 \geq d - (d^- - 3)/2$, de l'hypothèse $w \in W_{F_{\pm i}}$ qui entraîne $w^{-1}(k_i^2) = k_i^2$. Le k_i^b-ième coefficient du membre de droite de 2.9(3) vaut aussi 1. On en déduit

pour $i \in I^- \setminus I^{-*}$, $\mathbf{a}_i^{b,\diamond} = 1$.

2.12 Calcul de $\mathbf{a}_i^\diamond$, pour $i \in I^{-*}$

Soit $i \in I^{-*}$. On doit calculer $a^\diamond(w)_{k_i}$ pour $w \in W_{F_i}$. On a $\rho(w)_{k_i} = 1$. Le terme $(S_H(w)S(w)^{-1})_{k_i}$ vaut 1 par le même argument que dans le paragraphe précédent. Dans le produit 2.9(3), seuls contribuent au k_i-ième coefficient ceux pour lequel l'indice i est notre i.

Soient $j \in I^+ \setminus I^{+*}$ et $\beta \in \check{\underline{\Sigma}}(i,j)_{res}$. L'orbite de β est asymétrique, donc $\chi_\beta = 1$. Avec les notations de 2.4, on a simplement

$$r_\beta(w)^{-1} = \prod_{n=1,\dots,N, \beta_n > 0, w^{-1}(\beta_n) < 0} \check{\beta}_n(-1).$$

Ne contribuent à la k_i-ième composante que les β_n de la forme $(\check{\alpha}_{k_i,l})_{res}$ ou $(\check{\alpha}_{d+1-k_i,l})_{res}$. Les racines de la première forme sont positives, celles de la seconde forme sont négatives. Un élément $w \in W_{F_i}$ fixe k_i et $d+1-k_i$ donc respecte la positivité. La k_i-ième composante de $r_\beta(w)$ vaut donc 1 pour $w \in W_{F_i}$.

Soit maintenant $j \in I^{+*}$. On a $\check{\underline{\Sigma}}(i,j)_{res} = \{(\check{\alpha}_{k_i,\xi(k_j)})_{res}; \xi \in \Xi(i,j)_\pm\}$. Fixons $\xi \in \Xi(i,j)_\pm$, posons $\beta = (\check{\alpha}_{k_i,\xi(k_j)})_{res}$.

Supposons d'abord l'orbite de β asymétrique. Il intervient dans $r_\beta(w)^{-1}$ un produit de $\check{\beta}_n(-1)$. Sa k_i-ième composante vaut 1 pour la même raison que ci-dessus. Il reste le produit

$$\prod_{n=1,\dots,N} \check{\beta}_n(\chi_\beta(v_n(w)))^{-1}.$$

Pour $n = 1, \dots, N$, la k_i-ième composante de $\check{\beta}_n(\chi_\beta(v_n(w)))^{-1}$ vaut

(1) $\chi_\beta(v_n(w))^{-1}$ si β_n est de la forme $(\check{\alpha}_{k_i,l})_{res}$, c'est-à-dire si $w_n \in W_{F_i}$;

(2) $\chi_\beta(v_n(w))$ si β_n est de la forme $(\check{\alpha}_{d+1-k_i,l})_{res}$, c'est-à-dire si $w_n \in W_{F_i}\tau_i$;

1 sinon.

L'ensemble $\{w_n; n = 1, \dots, N, w_n \in W_{F_i}\}$ est un ensemble de représentants de $W_{F_\beta} \backslash W_{F_i}$. L'application

$$\begin{array}{ccc} W_{F_i} & \to & \mathbb{C}^\times \\ w & \mapsto & \prod_{n=1,\dots,N, w_n \in \Gamma_i} \chi_\beta(v_n(w))^{-1} \end{array}$$

est le transfert de W_{F_β} à W_{F_i} du caractère χ_β^{-1}. Le transfert correspond à la restriction de $F_\beta^\times$ à $F_i^\times$. Puisque $\chi_\beta^{-1} = \chi_i^{-1} \circ Norm_{F_\beta/F_i}$, cette restriction est égale à $\chi_i^{[-F_\beta:F_i]}$. Le produit des termes (1) est donc $\chi_i(w)^{-[F_\beta:F_i]}$. L'ensemble $\{w_n\tau_i^{-1}; n = 1, \dots, N, , w_n \in W_{F_i}\tau_i\}$ est encore un ensemble de représentants de $W_{F_\beta} \backslash W_{F_i}$. Remarquons que, pour w_n dans cet ensemble, l'égalité $w_n w = v_n(w) w_{n'}$ équivaut à $w_n\tau_i^{-1}(\tau_i w \tau_i^{-1}) = v_n(w) w_{n'}\tau_i^{-1}$. Le même raisonnement que ci-dessus montre que le produit des termes (2) vaut $\chi_i(\tau_i w \tau_i^{-1})^{[F_\beta:F_i]}$. On a l'égalité $\chi_i \circ \tau_i = \chi_i^{-1}$ de caractères de $F_i^\times$, et cela se traduit du côté galoisien par l'égalité $\chi_i(\tau_i w\tau_i^{-1}) = \chi_i(w)^{-1}$. Le produit des termes (2) est donc égal à celui des termes (1). La contribution totale est donc $\chi_i(w)^{-2[F_\beta:F_i]}$. Ce calcul montre aussi que $[F_\beta : F_i]$ est égal à la fois au nombre d'éléments de la Γ-orbite de β de la forme $(\check{\alpha}_{k_i,l})_{res}$ et au nombre d'éléments de la même orbite de la forme $(\check{\alpha}_{d+1-k_i,l})_{res}$. Ce deuxième nombre est égal à celui des éléments de la Γ-orbite de $-\beta$ de la forme $(\check{\alpha}_{k_i,l})_{res}$. Donc $2[F_\beta : F_i]$ est le nombre d'éléments de la $\Gamma \times \{\pm 1\}$-orbite de β de la forme $(\check{\alpha}_{k_i,l})_{res}$.

Supposons maintenant l'orbite de β symétrique. Cette fois, les β_n sont positifs, donc ne peuvent pas être de la forme $(\check{\alpha}_{d+1-k_i,l})_{res}$. La k_i-ième composante de $r_\beta(w)^{-1}$ est donc le produit des $\chi_\beta(v_n(w))^{-1}$ sur les $n = 1, ..., N$ tels que β_n soit de la forme $(\check{\alpha}_{k_i,l})_{res}$. Cette condition équivaut à $w_n \in W_{F_i}$. Parce que $W_{F_i} \cap W_{F_{\pm\beta}} = W_{F_\beta}$, on vérifie que l'ensemble des w_n qui satisfont cette condition est un ensemble de représentants de $W_{F_\beta} \backslash W_{F_i}$ et le même calcul que ci-dessus montre que la contribution de l'orbite de β est $\chi_i(w)^{-[F_\beta:F_i]}$. De plus, $[F_\beta : F_i]$ est le nombre d'éléments de la forme $(\check{\alpha}_{k_i,l})_{res}$ dans la Γ-orbite de β, ou dans la $\Gamma \times \{\pm 1\}$-orbite, cela revient au même.

On a calculé la contribution de chaque $\Gamma \times \{\pm 1\}$ orbite dans $\check{\Sigma}(i, j)$. Faisons le produit de ces contributions. On obtient $\chi_i(w)^{-1}$ élevé à la puissance le nombre d'éléments de $\check{\Sigma}(i, j)_{res}$ de la forme $(\check{\alpha}_{k_i,l})_{res}$. Ce nombre est évidemment égal au nombre d'éléments de K_j c'est-à-dire $[F_j : F]$. La contribution de $\check{\Sigma}(i, j)$ est donc $\chi_i(w)^{-[F_j:F]}$.

Il reste encore à calculer la contribution du deuxième produit de 2.9(3). On a choisi $\underline{\check{\Sigma}}(i)_{res} = \{(\alpha_{k_i,d+1-k_i})_{res}\}$. On obtient immédiatement pour contribution $\chi_i(w)^{-1}$. Finalement,

pour $i \in I^{-*}$, $\mathbf{a}_i^\diamond = \chi_i^{-1-\sum_{j\in I^{+*}}[F_j:F]}$.

2.13 Calcul de $\mathbf{a}_j^{b,\diamond}$ pour $j \in I^+ \setminus I^{+*}$

Soit $j \in I^+ \setminus I^{+*}$. Pour $b = 1, 2$, on doit calculer $a^\diamond(w)_{k_j^b}$ pour $w \in W_{F_{\pm j}}$. On a $\rho(w)_{k_j^b} = \chi(w)$. C'est en fait la restriction de χ à $W_{F_{\pm j}}$ qui intervient ici. En termes de caractère de $F_{\pm j}^\times$, il s'agit de $\chi \circ Norm_{F_{\pm j}/F}$. On a $(S_H(w)S(w)^{-1})_{k_j^b} = (-1)^{e(w)}$.

Dans le produit 2.9(3), seuls contribuent au k_j^b-ième coefficient ceux pour lequel l'indice j est notre j. Fixons $i \in I^{-*}$. Puisque $j \notin I^{+*}$, toutes les orbites dans $\check{\Sigma}(i, j)_{res}$ sont asymétriques. Notons E la réunion des Γ-orbites des $\beta \in \underline{\check{\Sigma}}(i, j)_{res}$. C'est un sous-ensemble de $\check{\Sigma}(i, j)$, stable par Γ et tel que $\check{\Sigma}(i, j) = E \sqcup (-E)$. La contribution du couple (i, j) au produit 2.9(3) est

$$\prod_{\beta\in E;\beta>0,w^{-1}(\beta)<0} \check{\beta}(-1).$$

Notons E', resp. E'', le sous-ensemble des éléments de E de la forme $(\check{\alpha}_{k,k_j^b})_{res}$, resp. $(\check{\alpha}_{k,d+1-k_j^b})_{res}$. Notons $e'(w)$, resp. $e''(w)$, le nombre d'éléments $\beta \in E'$, resp. $\beta \in E''$, tels que $\beta > 0$ et $w^{-1}(\beta) < 0$. La k_j^b-ième coordonnée du produit ci-dessus est $(-1)^{e'(w)+e''(w)}$. Notons K', resp. K'', l'ensemble des $k \in K_i$ tels que $(\check{\alpha}_{k,k_j^b})_{res} \in E'$, resp. $(\check{\alpha}_{k,d+1-k_j^b})_{res} \in E''$. Ce sont des sous-ensembles invariants par $\Gamma_{F_{\pm j}}$. Posons $K_+ = K_i \cap \{1, ..., (d^- - 1)/2\}$ et $K_- = K_i \cap \{d - (d^- - 3)/2, ..., d\}$.Si $\beta = (\check{\alpha}_{k,l})_{res}$, avec $k \in K_i$ et $l \in K_j$, la condition $\beta > 0$, resp. $\beta < 0$, équivaut à $k \in K_+$, resp. $k \in K_-$. Donc $e''(w)$ est le nombre d'éléments de l'ensemble des $k \in K'' \cap K_+$ tels que $w^{-1}(k) \in K'' \cap K_-$. Pour deux signes $\epsilon, \epsilon' = \pm$, notons $K''_{\epsilon,\epsilon'}(w)$ l'ensemble des $k \in K'' \cap K_\epsilon$ tels que $w^{-1}(k) \in K'' \cap K_{\epsilon'}$. On a

$$w^{-1}(K''_{+-}(w)) \sqcup w^{-1}(K''_{--}(w)) = K'' \cap K_- = K''_{-+}(w) \sqcup K''_{--}(w).$$

Puisque w^{-1} se restreint en une bijection de K'' sur lui-même, les égalités ci-dessus montrent que les nombres d'éléments de $K''_{+-}(w)$ et de $K''_{-+}(w)$ sont égaux. Donc $e''(w)$ est aussi le nombre d'éléments de $K''_{-+}(w)$. L'application $k \mapsto (\check{\alpha}_{d+1-k,k_j^b})_{res}$ est une bijection de $K''_{-+}(w)$ sur l'ensemble des éléments β de $-E$ de la forme $(\check{\alpha}_{k,k_j^b})_{res}$ tels que $\beta > 0$ et $w^{-1}(\beta) < 0$. Finalement, $e'(w) + e''(w)$ est le nombre d'éléments $\beta \in E \cup (-E) = \check{\Sigma}(i,j)_{res}$ de la forme $(\check{\alpha}_{k,k_j^b})_{res}$, tels que $\beta > 0$ et $w^{-1}(\beta) < 0$. C'est aussi le nombre des $k \in K_+$ tels que $w^{-1}(k) \in K_-$, c'est-à-dire $e_i(w)$. La contribution des éléments de $\check{\Sigma}(i,j)_{res}$ est donc $(-1)^{e_i(w)}$.

Le produit sur $i \in I^{-*}$ de ces contributions est $(-1)^{e(w)}$. Il compense exactement la contribution de $S_H(w)S(w)^{-1}$. Le résultat est

pour $j \in I^+ \setminus I^{+*}$ et $b = 1, 2$, $\mathbf{a}_j^b = \chi \circ Norm_{F_{\pm j}/F}$.

2.14 Calcul de $\mathbf{a}_j^\diamond$ pour $j \in I^{+*}$

Soit $j \in I^{+*}$. On doit calculer $a^\diamond(w)_{k_j}$ pour $w \in W_{F_j}$. On a $\rho(w)_{k_j} = \chi(w)$. La restriction de χ à W_{F_j} correspond au caractère $\chi \circ Norm_{F_j/F}$ de $F_j^\times$. On a $(S_H(w)S(w)^{-1})_{k_j} = (-1)^{e(w)}$.

Dans le produit 2.9(3), seuls contribuent au k_j-ième coefficient ceux pour lequel l'indice j est notre j. Fixons $i \in I^{-*}$. La contribution des orbites asymétriques est un produit de deux termes, dont le premier est un produit de $\check{\beta}(-1)$. On calcule la contribution de ce premier produit comme dans le paragraphe précédent. Le résultat est le suivant. Notons $\check{\Sigma}(i,j)_{res,asym}$ l'ensemble des éléments de $\check{\Sigma}(i,j)_{res}$ dont l'orbite est asymétrique. Notons $e_{i,asym}(w)$ le nombre d'éléments $\beta \in \check{\Sigma}(i,j)_{res,asym}$ de la forme $(\check{\alpha}_{k,k_j})_{res}$, tels que $\beta > 0$ et $w^{-1}(\beta) < 0$. Alors la contribution est $(-1)^{e_{i,asym}(w)}$.

Soit $\xi \in \Xi(i,j)_\pm$, posons $\beta = (\check{\alpha}_{k_i,\xi(k_j)})_{res}$, supposons l'orbite de β asymétrique, calculons la contribution du deuxième terme de $r_\beta(w)^{-1}$. Pour $n = 1, ..., N$, la k_j-ième composante de $\check{\beta}_n(\chi_\beta(v_n(w)))^{-1}$ vaut

(1) $\chi_\beta(v_n(w))$ si β_n est de la forme $(\check{\alpha}_{k,k_j})_{res}$, c'est-à-dire si $w_n^{-1}\xi \in W_{F_j}$;

(2) $\chi_\beta(v_n(w))^{-1}$ si β_n est de la forme $(\check{\alpha}_{k,d+1-k_j})_{res}$, c'est-à-dire si $w_n^{-1}\xi \in W_{F_j}\tau_j$;

(3) 1 sinon.

Notons $\mathcal{N}$ le sous-ensemble des $n \in \{1, ..., N\}$ tels que $w_n^{-1}\xi \in W_{F_j}$. Pour $n \in \mathcal{N}$, posons $w'_n = \xi^{-1}w_n$. L'ensemble $\{w'_n; n \in \mathcal{N}\}$ est un ensemble de représentants du quotient $\xi^{-1}W_{F_\beta}\xi\backslash W_{F_j} = (\xi^{-1}W_{F_i}\xi \cap W_{F_j})\backslash W_{F_j}$. Pour $n \in \mathcal{N}$, $v_n(w)$ est défini par l'égalité $w_n w = v_n(w)w_{n'}$. On a nécessairement $n' \in \mathcal{N}$. Posons $v'_n(w) = \xi^{-1}v_n(w)\xi$. On a $v_n(w) \in \xi^{-1}W_{F_i}\xi \cap W_{F_j}$ et l'égalité précédente équivaut à $w'_n w = v'_n(w)w'_{n'}$. La contribution des termes (1) s'écrit

$$\prod_{n\in\mathcal{N}} \chi_\beta(\xi v'_n(w)\xi^{-1}).$$

C'est la valeur en w du transfert à W_{F_j} du caractère $w' \mapsto \chi_\beta(\xi w'\xi^{-1})$ de $\xi^{-1}W_{F_i}\xi \cap W_{F_j}$. Comme caractère de $F_j^\times$, c'est la restriction à $F_j^\times$ du caractère $\chi_\beta \circ \xi$ de $\xi^{-1}(F_\beta^\times)$. Pour $\lambda \in F_j^\times$, on a

$$\chi_\beta \circ \xi(\lambda) = \chi_i \circ Norm_{F_\beta/F_i} \circ \xi(\lambda) = \prod_{\sigma\in\Gamma_i/(\Gamma_i\cap\xi\Gamma_j\xi^{-1})} \chi_i(\sigma\xi(\lambda)) = \prod_{\sigma\in\Gamma_i\xi\Gamma_j/\Gamma_j} \chi_i(\sigma(\lambda)).$$

Un calcul analogue vaut pour la contribution des termes vérifiant (2) : il suffit d'y remplacer ξ par $\xi\tau_j^{-1}$ et les caractères par leurs inverses. On obtient un caractère de $F_j^\times$ défini par
$$\lambda \mapsto \prod_{\sigma\in\Gamma_i\xi\tau_j^{-1}\Gamma_j/\Gamma_j} \chi_i(\sigma(\lambda))^{-1}.$$
On se rappelle qu'il est associé à ξ un élément $\xi'\in\Xi(i,j)$ tel que $\tau_i\xi\tau_j\in\Gamma_i\xi'\Gamma_j$. Puisque l'orbite de β est asymétrique, on a $\xi'\neq\xi$. On a l'égalité $\Gamma_i\xi\tau_j^{-1}\Gamma_j=\tau_i\Gamma_i\xi'\Gamma_j$. Puisque $\chi_i\circ\tau_i=\chi_i^{-1}$, le caractère ci-dessus est égal à
$$\lambda \mapsto \prod_{\sigma\in\Gamma_i\xi'\Gamma_j/\Gamma_j} \chi_i(\sigma(\lambda)).$$
Autrement dit, la contribution des termes (2) est similaire à celle des termes vérifiant (1) : on a seulement remplacé ξ par ξ'.

Supposons maintenant l'orbite de β symétrique. Pour $n=1,...,N$, la k_j-ième composante de $\check{\beta}_n(\chi_\beta(v_n(w)))^{-1}$ est encore calculée par (1), (2) et (3) ci-dessus. Notons $\mathcal{N}_1$, resp. $\mathcal{N}_2$, le sous-ensemble des $n\in\{1,...,N\}$ tels que $w_n^{-1}\xi\in W_{F_j}$, resp. $w_n^{-1}\xi\in W_{F_j}\tau_j$. Remarquons que $w_0\xi\tau_j^{-1}\in\xi W_{F_j}$. La condition $n\in\mathcal{N}_2$ équivaut donc à $w_{-n}^{-1}\xi\in W_{F_j}$. Pour $n\in\mathcal{N}_1$, posons $w''_n=\xi^{-1}w_n$. Pour $n\in\mathcal{N}_2$, posons $w''_n=\xi^{-1}w_{-n}$. L'ensemble $\{w''_n; n\in\mathcal{N}_1\cup\mathcal{N}_2\}$ est un ensemble de représentants du quotient $(\xi^{-1}W_{F_i}\xi\cap W_{F_j})\backslash W_{F_j}$. Pour $n\in\mathcal{N}_1\cup\mathcal{N}_2$, soient $(n'',v''_n(w))\in(\mathcal{N}_1\cup\mathcal{N}_2)\times(\xi^{-1}W_{F_i}\xi\cap W_{F_j})$ tels que $w''_nw=v''_n(w)w''_{n''}$. Comparons $v''_n(w)$ et $v_n(w)$. Rappelons que l'on a une égalité $w_nw=v_n(w)w_{n'}$, avec $n'\in\{\pm1,...,\pm N\}$. Supposons $n\in\mathcal{N}_1$ et $n'>0$. L'élément n' appartient nécessairement à $\mathcal{N}_1$ et on a $w''_nw=\xi^{-1}v_n(w)\xi w''_{n'}$, d'où $v''_n(w)=\xi^{-1}v_n(w)\xi$. Supposons $n\in\mathcal{N}_1$ et $n'<0$. Alors $-n'$ appartient nécessairement à $\mathcal{N}_2$ et on a $w''_nw=\xi^{-1}v_n(w)\xi w''_{-n'}$, d'où $v''_n(w)=\xi^{-1}v_n(w)\xi$. Supposons $n\in\mathcal{N}_2$ et $n'>0$. L'élément n' appartient nécessairement à $\mathcal{N}_2$ et on a $w''_nw=\xi^{-1}w_0v_n(w)w_0^{-1}\xi w''_{n'}$, d'où $v''_n(w)=\xi^{-1}w_0v_n(w)w_0^{-1}\xi$. Supposons enfin $n\in\mathcal{N}_2$ et $n'<0$. L'élément $-n'$ appartient nécessairement à $\mathcal{N}_1$ et on a $w''_nw=\xi^{-1}w_0v_n(w)w_0\xi w''_{n'}$, d'où $v''_n(w)=\xi^{-1}w_0v_n(w)w_0\xi$. La contribution de $n\in\mathcal{N}_1\cup\mathcal{N}_2$ est donc

- $\chi_\beta(\xi v''_n(w)\xi^{-1})$ si $n\in\mathcal{N}_1$;
- $\chi_\beta(w_0^{-1}\xi v''_n(w)\xi^{-1}w_0)^{-1}$ si $n\in\mathcal{N}_2$ et $n'>0$;
- $\chi_\beta(w_0^{-1}\xi v''_n(w)\xi^{-1}w_0^{-1})^{-1}$, si $n\in\mathcal{N}_2$ et $n'<0$.

Les propriétés de χ_β se traduisent en termes galoisiens par $\chi_\beta(w_0^{-1}vw_0)=\chi_\beta(v)^{-1}$ pour tout $v\in W_{F_\beta}$ et $\chi_\beta(w_0^2)=-1$. Alors le produit des termes ci-dessus est égal à
$$(-1)^{e_\xi(w)}\prod_{n\in\mathcal{N}_1\cup\mathcal{N}_2}\chi_\beta(\xi v''_n(w)\xi^{-1}),$$
où $e_\xi(w)$ est le nombre d'éléments $n\in\mathcal{N}_2$ tels que $n'<0$. Comme dans le cas d'une orbite asymétrique, le produit s'interprète comme un transfert, lequel se traduit par le caractère
$$\lambda \mapsto \prod_{\sigma\in\Gamma_i\xi\Gamma_j/\Gamma_j} \chi_i(\sigma(\lambda))$$
de $F_j^\times$. Par l'application $n\mapsto\beta_n$, on voit que $e_\xi(w)$ est le nombre de β' dans l'orbite de β, de la forme $(\alpha_{k,k_j})_{res}$, tels que $\beta'>0$ et $w^{-1}(\beta')<0$.

Notons $\check{\Sigma}(i,j)_{res,sym}$ l'ensemble des $\beta\in\check{\Sigma}(i,j)_{res}$ dont la Γ-orbite est symétrique. Notons $e_{i,sym}(w)$ le nombre d'éléments $\beta\in\check{\Sigma}(i,j)_{res,sym}$ de la forme $(\check{\alpha}_{k,k_j})_{res}$, tels que $\beta>0$ et $w^{-1}(\beta)<0$.

Le produit sur $\xi\in\Xi(i,j)_{\pm}$ des contributions obtenues est le produit de
• $(-1)^{e_{i,sym}(w)}$;
• la valeur en w du caractère de W_{F_j} dont le caractère associé de $F_j^{\times}$ est

$$\lambda\mapsto\prod_{\xi\in\Xi(i,j)}\prod_{\sigma\in\Gamma_i\xi\Gamma_j/\Gamma_j}\chi_i(\sigma(\lambda))=\prod_{\sigma\in\Gamma/\Gamma_j}\chi_i(\sigma(\lambda))=\chi_i\circ Norm_{F_j/F}(\lambda).$$

On se rappelle que les orbites asymétriques dans $\check{\Sigma}(i,j)_{res}$ avaient déjà fourni une contribution $(-1)^{e_{i,asym}(w)}$. La somme $e_{i,sym}(w)+e_{i,asym}(w)$ est le nombre d'éléments $\beta\in\check{\Sigma}_{res}(i,j)$ de la forme $(\check{\alpha}_{k,k_j})_{res}$, tels que $\beta>0$ et $w^{-1}(\beta)<0$, c'est-à-dire $e_i(w)$. Quand on fait le produit des signes $(-1)^{e_i(w)}$ sur les $i\in I^{-*}$, on obtient $(-1)^{e(w)}$ et ce terme compense le signe qui provient de $S_H(w)S(w)^{-1}$. Finalement

pour $j\in I^{+*}$, $\mathbf{a}_j^{\diamond}=\chi\circ Norm_{F_j/F}\prod_{i\in I^{-*}}\chi_i\circ Norm_{F_j/F}$.

2.15 Fin du calcul de $\Delta_{III}(y,\tilde{x})$

En utilisant la formule 2.9(1) et nos calculs des différents caractères qui y interviennent, on obtient que $\Delta_{III}(y,\tilde{x})$ est égal au produit des quatre termes suivants :
(1) $\prod_{i\in I^{-*},j\in I^{+*}}\chi_i((c_i^{-1}\tau_i(x_i))^{[F_j:F]}Norm_{F_j/F}(c_j\tau_j(x_j)^{-1}))$;
(2) $\prod_{i\in I^{-*}}\chi_i(c_i^{-1}\tau_i(x_i))$;
(3) $\prod_{i\in I^{-*}}sgn_{F_i/F_{\pm i}}(c_Dx_D^{-1})$;
(4) $\chi(c_Dx_D^{-1}\prod_{j\in I^+}Norm_{F_j/F}(c_j\tau_j(x_j)^{-1}))$.

2.16 Calcul du terme 2.15(3)

Calculons le déterminant dans $F^{\times}/F^{\times,2}$ de la forme quadratique $\tilde{\theta}$. D'après la définition de 1.2, c'est $-\nu$. On doit comparer ν et le terme η défini en 1.6. Ici, le groupe G_θ étant spécial orthogonal impair, tous ses épinglages définis sur F sont conjugués par $G_\theta(F)$ et conduisent au même η. On peut choisir l'épinglage de sorte que l'élément nilpotent N associé soit simplement défini par $Ne_k=e_{k-1}$ pour $k=2,...,d$ et $Ne_1=0$. Alors $\eta=\tilde{\theta}(e_d,N^{d-1}e_d)=\tilde{\theta}(e_d,e_1)=-\nu$. Considérons la définition de c_D donnée en 2.1. Le déterminant de $\tilde{\theta}$ est le produit de c_D et du produit sur tous les $i\in I$ des déterminants des formes quadratiques $(v_i,v_i')\mapsto trace_{F_i/F}(\tau_i(v_i)v_i'c_i)$. Fixons $i\in I$. Soit $\delta_i\in F_{\pm i}^{\times}$ tel que $F_i=F_{\pm i}(\sqrt{\delta_i})$ (si F_i n'est pas un corps, $\delta_i=1$). On vérifie que le déterminant de la forme ci-dessus est $Norm_{F_{\pm i}/F}(-\delta_i)$. L'élément X_i fixé en 2.5 vérifie $\tau_i(X_i)=-X_i$. Il est donc de la forme $\mu_i\sqrt{\delta_i}$, avec $\mu_i\in F_{\pm i}^{\times}$. Alors $Norm_{F_i/F_{\pm i}}(X_i)=-\mu_i^2\delta_i$ et le déterminant précédent est égal (modulo un carré) à $Norm_{F_i/F}(X_i)$. En utilisant 2.5(2), on obtient

$$c_D\equiv\eta\prod_{i\in I}Norm_{F_i/F}((y_i-1)(1+y_i)^{-1})\ mod\ F^{\times,2}.$$

Par définition du polynôme P_I, on a les égalités

$$P_I(-1)=\prod_{i\in I}Norm_{F_i/F}(-1-y_i)=\prod_{i\in I}Norm_{F_i/F}(1+y_i),$$

$$P_I(1)=\prod_{i\in I}Norm_{F_i/F}(1-y_i)=\prod_{i\in I}Norm_{F_i/F}(y_i-1).$$

On en déduit

$$c_D \equiv \eta P_I(1)P_I(-1),\ mod\ F^{\times,2}.$$

Puisque les caractères $sgn_{F_i/F_{\pm i}}$ sont d'ordre 2, le terme 2.15(3) vaut donc

$$\prod_{i\in I^{-*}} sgn_{F_i/F_{\pm i}}(\eta x_D P_I(1)P_I(-1))$$

2.17 Calcul du terme 2.15(4)

Soit $j \in I^+$. D'après 2.5(3), on a

$$x_j\tau_j(x_j)^{-1} = y_j = (1+X_j)(1-X_j)^{-1} = (1+X_j)\tau_j(1+X_j)^{-1}.$$

Il existe donc $\lambda_j \in F_{\pm j}^{\times}$ tel que $x_j = \lambda_j(1+X_j)$. Alors

$$Norm_{F_j/F}(c_j\tau_j(x_j)^{-1}) = Norm_{F_j/F}(c_j\lambda_j^{-1}(1-X_j)^{-1}).$$

En utilisant 2.5(2), on obtient

$$Norm_{F_j/F}(c_j\tau_j(x_j)^{-1}) = Norm_{F_{\pm j}/F}(4^{-1}c_j^2\lambda_j^{-2})Norm_{F_j/F}(1+y_j) \equiv Norm_{F_j/F}(1+y_j)\ mod\ F^{\times,2}.$$

Puisque χ est d'ordre au plus 2, le terme 2.15(4) est égal à

$$\chi(c_D x_D \prod_{j\in I^+} Norm_{F_j/F}(1+y_j)).$$

Comme en 2.16, le produit intervenant ci-dessus vaut $P_{I^+}(-1)$. En remplaçant c_D par sa valeur calculée en 2.16, le terme 2.15(4) vaut

$$\chi(\eta x_D P_I(1)P_{I^-}(-1)).$$

2.18 Disparition des termes 2.8(1) et 2.15(1)

Fixons $i \in I^{-*}$ et $j \in I^{+*}$. Le produit des contributions de (i,j) à 2.8(1) et 2.15(1) est $\chi_i(A_{i,j})$ où

$$A_{i,j} = (c_i^{-1}\tau_i(x_i))^{[F_j:F]}Norm_{F_j/F}(c_j\tau_j(x_j)^{-1})P_j(y_i)Q_j(X_i)^{-1}.$$

Introduisons la relation d'équivalence entre deux éléments $\mu,\mu' \in \bar{F}^{\times}$: $\mu \equiv_i \mu'$ si et seulement si $\mu^{-1}\mu' \in Norm_{F_i/F_{\pm i}}(F_i^{\times})$. On va montrer que $\chi_i(A_{i,j}) = 1$. Pour cela, il suffit de prouver que $A_{i,j} \equiv_i 1$. On a $\tau_i(x_i)^2 = \tau_i(x_i)x_iy_i^{-1}$, d'où

$$(c_i^{-1}\tau_i(x_i))^{[F_j:F]} = (c_i^2 Norm_{F_i/F_{\pm i}}(x_i))^{[F_{\pm j}:F]}y_i^{-[F_{\pm j}/F]} \equiv_i y_i^{-[F_{\pm j}:F]}.$$

On a $Norm_{F_j/F}(c_j) = Norm_{F_{\pm j}/F}(c_j)^2 \equiv_i 1$. En utilisant la relation 2.5(3) pour i et j on peut établir l'égalité suivante :

$$P_j(y_i) = (1-X_i)^{-[F_j:F]}P_j(-1)Q_j(X_i),$$

cf. [Li] lemme 7.12. D'où

$$A_{i,j} \equiv_i y_i^{-[F_{\pm j}:F]} Norm_{F_j/F}(\tau_j(x_j))^{-1}(1-X_i)^{-[F_j:F]}P_j(-1).$$

On a $(1-X_i)^{-2} = (1-X_i)^{-1}(1+X_i)^{-1}y_i \equiv_i y_i$, d'où

$$y_i^{-[F_{\pm j}:F]}(1-X_i)^{-[F_j:F]} \equiv_i 1.$$

On a aussi

$$P_j(-1) = Norm_{F_j/F}(-1-y_j) = Norm_{F_j/F}((-\tau_j(x_j)-x_j)\tau_j(x_j)^{-1})$$

$$= Norm_{F_{\pm j}/F}(x_j+\tau_j(x_j))^2 Norm_{F_j/F}(\tau_j(x_j))^{-1} \equiv_i Norm_{F_j/F}(\tau_j(x_j))^{-1},$$

d'où

$$A_{i,j} \equiv_i Norm_{F_j/F}(\tau_j(x_j))^{-2} \equiv_i 1.$$

2.19 Fin du calcul

Il nous reste à calculer le produit de 2.5(1) et des termes 2.8(2) et 2.15(2). On obtient un produit

$$\prod_{i\in I^{-*}} sgn_{F_i/F_{\pm i}}(\eta c_i Q'_X(X_i))\chi_i((y_i+1)2^{-1}c_i^{-1}\tau_i(x_i)).$$

Soit $i \in I^{-*}$. Remarquons que $(y_i+1)\tau_i(x_i) = (x_i+\tau_i(x_i))$. Ce terme appartient à $F_{\pm i}$. Cela permet de remplacer χ_i par $sgn_{F_i/F_{\pm i}}$ dans la formule ci-dessus et on obtient

$$(1) \prod_{i\in I^{-*}} sgn_{F_i/F_{\pm i}}(B_i),$$

où

$$B_i = 2^{-1}\eta Q'_X(X_i)(y_i+1)\tau_i(x_i).$$

Notons P_y le polynôme caractéristique de y agissant sur $V^-\oplus V^+$. Les égalités 2.5(3) nous permettent d'établir l'égalité

$$2(1-X_i)^{d-2}P'_y(y_i) = -P_y(-1)Q'_X(X_i),$$

cf. [Li] lemme 7.12. Les valeurs propres de y agissant dans $V^-\oplus V^+$ sont les $\phi(y_i)$, pour $i\in I$ et $\phi\in\Phi_i$, et 1 qui intervient une fois (on se rappelle que (V^-,q^-) est un espace quadratique de dimension impaire). D'où $P_y(T) = (T-1)P_I(T)$, puis $P'_y(y_i) = (y_i-1)P'_I(y_i)$ et $-P_y(-1) = 2P_I(-1)$. Comme dans le paragraphe précédent, $(1-X_i)^2 \equiv_i y_i^{-1}$, d'où

$$Q'_X(X_i) \equiv_i (1-X_i)y_i^{(3-d)/2}P'_I(y_i)P_I(-1)^{-1}(y_i-1).$$

On a $\tau_i(x_i) = x_i\tau_i(x_i)x_i^{-1} \equiv_i x_i^{-1}$. Enfin, grâce à 2.5(3),

$$2(1-X_i)(y_i+1) = 4 \equiv_i 1.$$

On obtient

$$B_i \equiv_i \eta x_i^{-1}y_i^{(3-d)/2}P'_I(y_i)P_I(-1)^{-1}(y_i-1).$$

Le facteur de transfert $\Delta_{H,\tilde{G}}(y, \tilde{x})$ est le produit de (1) ci-dessus et des termes calculés en 2.16 et 2.17. On obtient la formule de la proposition 1.10.

Bibliographie

[KS] R. Kottwitz, D. Shelstad : *Foundations of twisted endoscopy*, Astérisque 255 (1999)

[LS] R.P. Langlands, D. Shelstad : *On the definition of transfer factors*, Math. Ann. 278 (1987), p.219-271

[Li] W.-W. Li : *Transfert d'intégrales orbitales pour le groupe métaplectique*, prépublication 2009

[W] J.-L. Waldspurger : *Intégrales orbitales nilpotentes et endoscopie pour les groupes classiques non ramifiés*, Astérisque 269 (2001)

CNRS-Institut de Mathématiques de Jussieu
175, rue du Chevaleret
75013 Paris
e-mail : waldspur@math.jussieu.fr